

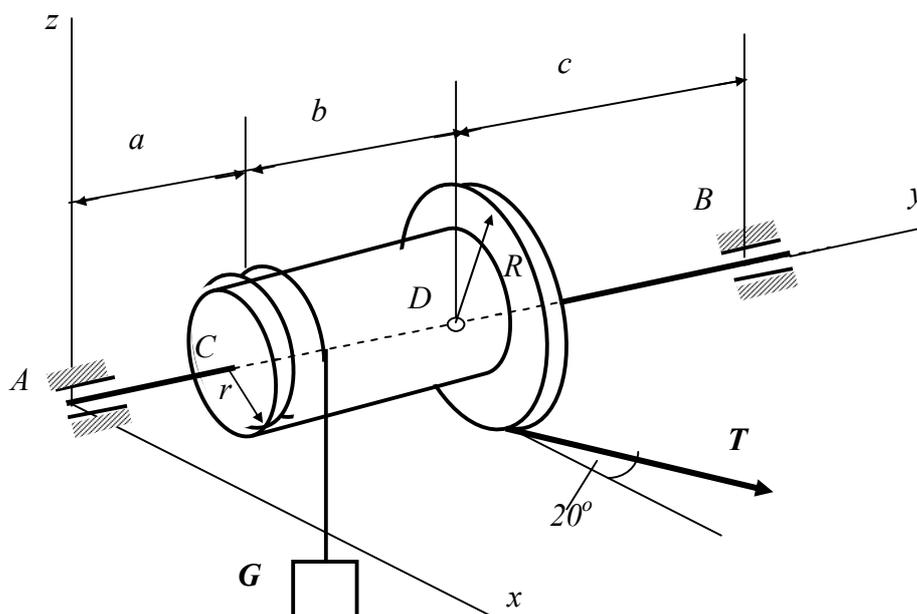
Министерство образования, науки и молодежной политики  
Краснодарского края

ГБОУ СПО КРАСНОДАРСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ КК

К.В. РОЩИН

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и задания к расчетно-графическим работам для студентов 2-го курса ДФО специальности 15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования, 23.02.03 Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта



Краснодар  
2016

УДК 621.01

ББК 30.12

Р–81

### **Рощин К.В.**

**Техническая механика:** Методические указания и задания к расчетно-графическим работам для студентов 2-го курса ДФО специальности 15.02.01 Монтаж и техническая эксплуатация промышленного оборудования, 23.02.03 Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта / К.В. Рощин. – Краснодар: ГБОУ СПО КТК КК, 2016 – 99 с., 300 экз.

Методические указания разработаны в соответствии с ФГОС среднего профессионального образования, утвержденным Министерством образования и науки Российской Федерации в 2014 году, примерной программы по дисциплине «Техническая механика» для специальностей среднего профессионального образования, утвержденной Научно-методическим центром среднего профессионального образования.

Методические указания содержат краткое содержание, требования к выполнению, оформлению и примеры выполнения расчетно-графических работ по курсу Техническая механика, справочные данные, список рекомендованной и дополнительной литературы.

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии специальности 15.02.01 17.01.2016, протокол № 4.

### **Рецензенты:**

Краев В.Б., преподаватель ГБОУ СПО КТК КК, инженер-механик;

Русинов П.О., кандидат технических наук, доцент кафедры Динамика и прочность машин Кубанского государственного технологического университета

Печатается по решению методического совета колледжа

© Краснодарский технический  
колледж, 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие требования к оформлению расчетно-графических работ (РГР) .....	4
РГР № 1 «Определение реакций опор в балках» .....	5
Примеры выполнения РГР № 1 .....	17
РГР № 2 «Определение реакций опор в рамах» .....	21
Примеры выполнения РГР № 2 .....	29
РГР № 3 «Определение центра тяжести сечения» .....	31
Геометрические характеристики плоских фигур .....	40
Пример выполнения РГР № 3 .....	43
РГР № 4 «Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы».	49
Пример выполнения РГР № 4 .....	54
РГР № 5 «Расчет балок на прочность при изгибе» .....	60
Контроль правильности построения эпюр Q и M .....	71
Примеры выполнения РГР № 5 .....	72
РГР № 6 «Расчет на прочность при растяжении-сжатии» .....	77
Пример выполнения РГР № 6 .....	84
РГР № 7 «Расчет на прочность вала при кручении» .....	87
Пример выполнения РГР № 7 .....	92
Литература .....	98

## **ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ**

Все расчетно-графические работы (РГР) по курсу “Техническая механика” оформляются в обычных 12-18-листных тетрадях в клетку. Удалять замечания преподавателя или вырывать листы из проверенных расчетно-графических работ не допускается.

Расчетно-графическая работа выполняется чернилами или пастой черного, синего или фиолетового цветов. Пояснительная записка должна начинаться с задания на РГР. Далее записываются все исходные данные задачи. Перед каждой расчетной операцией необходимо дать краткое пояснение смысла и последовательности выполнения этого этапа расчета. Приступая к выполнению каждого пункта расчета, следует иметь в виду, что некоторые буквенные обозначения введены лишь как исходные данные. Выкладки с использованием этих обозначений, приводящие к громоздким результатам, не рекомендуются. Все расчеты должны выполняться с соблюдением правил приближенных вычислений с точностью до двух цифр после запятой, кроме особо оговоренных случаев.

Чертежи в работе должны быть выполнены аккуратно, карандашом или черной ручкой, в выбранном масштабе, с помощью чертежных инструментов. Характерные ординаты эпюр и графиков, оси и другие величины рекомендуется выделять цветом, отличным от основного. На чертежах следует проставлять как буквенные, так и числовые значения размеров, нагрузок и реакций опор.

При исправлении полученной от преподавателя проверенной работы не разрешается стирать вопросы и замечания, сделанные преподавателем. Оформление расчетных работ следует выполнять согласно образцам, приведенным в предлагаемых методических указаниях. Расчетно-графическая работа, выполненная и оформленная с нарушением настоящих указаний, на проверку не принимается.

## **РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1**

### **«ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР В БАЛКАХ»**

Вариант задания выдается в виде числа, по которому выбираются номера задач для решения и строка исходных данных из таблицы 1.

Работы, выполненные не по шифру, преподавателем не проверяются.

Для заданных балок (табл. 2) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 1 требуется:

1. Записать уравнения равновесия для определения опорных реакций в общем виде.
2. Определить опорные реакции, подставив в уравнения соответствующие числовые значения.
3. Выполнить проверку найденных опорных реакций.

Исходные данные к РГР № 1

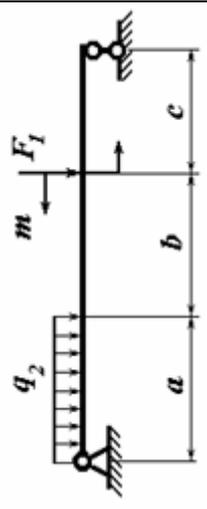
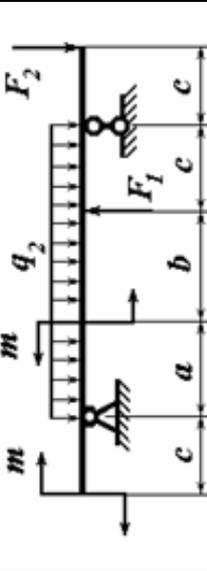
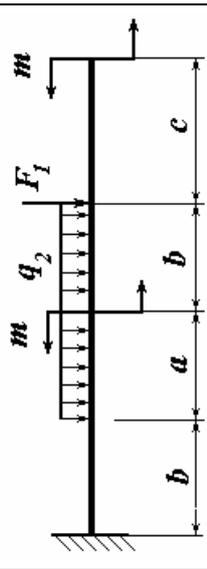
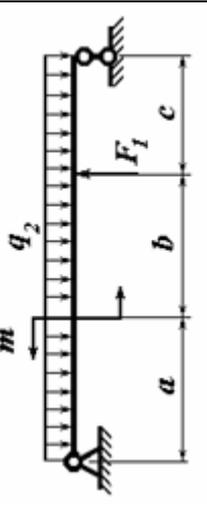
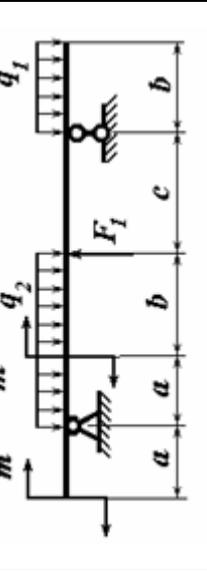
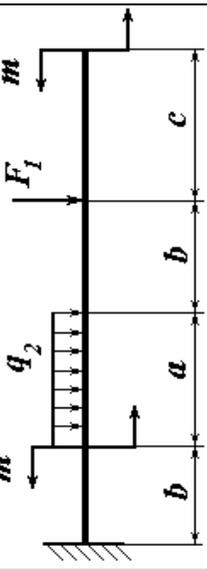
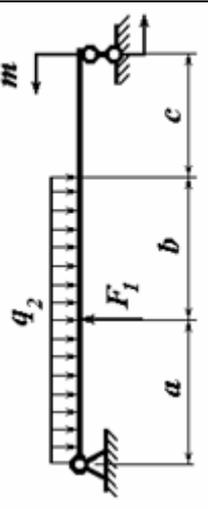
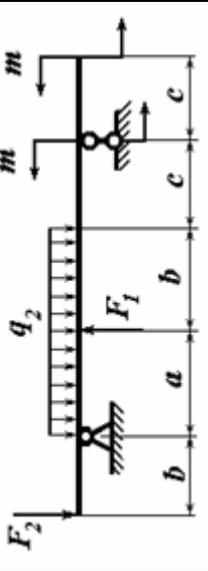
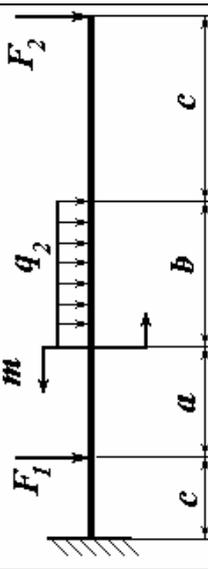
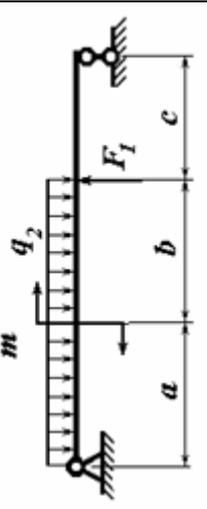
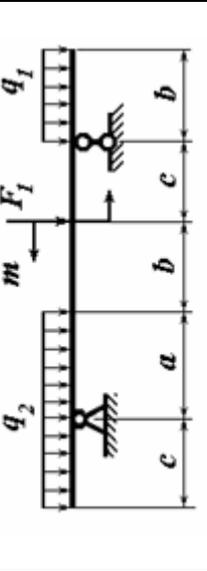
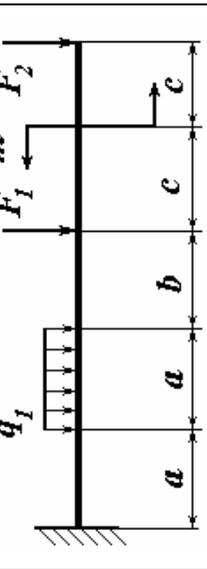
№ п/п	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$m$ , кНм
1	3	2	1	25	15	6	2	40
2	2	1,5	2	30	25	4	3	45
3	3,5	1	3	20	35	5	4	50
4	2,5	2,5	2,5	35	30	3	5	55
5	2	2	1,5	15	20	2	6	60
6	2,5	1,5	3,5	10	15	4	2	35
7	3,5	2,5	3	15	25	5	3	30
8	2,5	2	2,5	20	35	6	4	45
9	2	1,5	2	30	20	3	5	55
10	3	1	1,5	15	10	2	6	35
11	3,5	2	1	25	30	6	3	40
12	3	2	1	25	15	6	2	40
13	2	1	2	30	25	4	3	45
14	3,5	2,5	3	20	35	5	4	50
15	2,5	2	2	35	30	3	2	55
16	2	1,5	3	15	15	2	3	40
17	2,5	2,5	2,5	10	25	4	4	45
18	3,5	2	1,5	15	35	5	5	50
19	2,5	1,5	3,5	20	30	6	6	55
20	2	1	3	30	20	3	2	60
21	3	2	2,5	15	15	2	3	35
22	3,5	1,5	1	25	25	6	4	30
23	2,5	1	1,5	25	35	4	3	45
24	2,5	2,5	1,5	35	20	5	2	55
25	2	1	3	10	35	4	3	35
26	3	2	2,5	15	30	6	2	40
27	2,5	1,5	2	20	25	2	4	45
28	3,5	1,5	1,5	25	20	3	5	50
29	3	2	1	30	15	5	6	55
30	2,5	2,5	1,5	25	10	6	2	60

# ЧАСТЬ 1. ДВУХОПОРНАЯ БАЛКА

Таблица 2

Задания к расчетно-графической работе № 1

№ вар.	Двухопорная балка	Двухопорная балка с консолями	Консольная балка
1			
2			
3			
4			

5			
6			
7			
8			

9			
10			
11			
12			

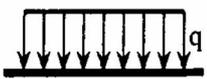
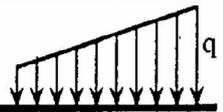
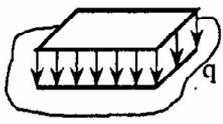
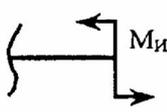
13				
14				
15				
16				

17			
18			
19			
20			

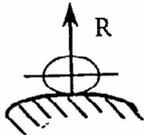
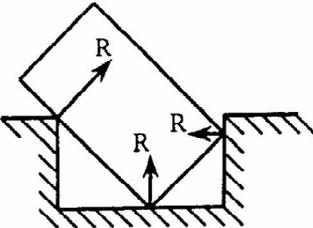
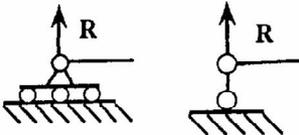
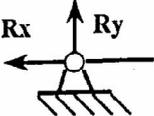
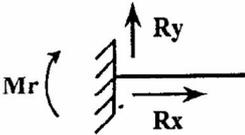
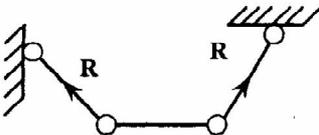
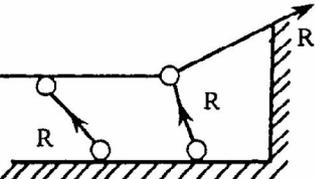
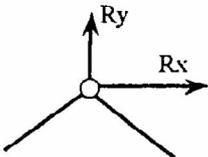
21			
22			
23			
24			

25			
26			
27			
28			

Т а б л и ц а 3 Виды нагрузок. Справочная таблица

Нагрузка	Единицы измерения	Условное обозначение нагрузки
+Сосредоточенная сила	Н	
Равномерно распределенная нагрузка по длине	Н/м	
Неравномерно распределенная нагрузка по длине	Н/м	
Нагрузка, распределенная по площади	Н/м <sup>2</sup>	
Момент силы или пары сил	Н·м	
Вращающий момент	Н·м	

## Виды связей. Справочная таблица

Наименование видов связей	Реакции	Направление
1	2	3
Касание двух поверхностей		По нормали к касательной в точке касания
Касание ребра и поверхности		По нормали к поверхностям в точке касания
Шарнирно-подвижная опора		Перпендикулярно опорной поверхности (одна реакция)
Шарнирно-неподвижная опора		Две взаимно перпендикулярные реакции
Жесткая заделка		Две взаимно перпендикулярные реакции и момент
Нерастяжимая нить		Вдоль нити
Жесткий невесомый стержень		Вдоль оси стержня
Шарнирное соединение двух тел		Две взаимно перпендикулярные реакции

# ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 1

## ПРИМЕР 1.

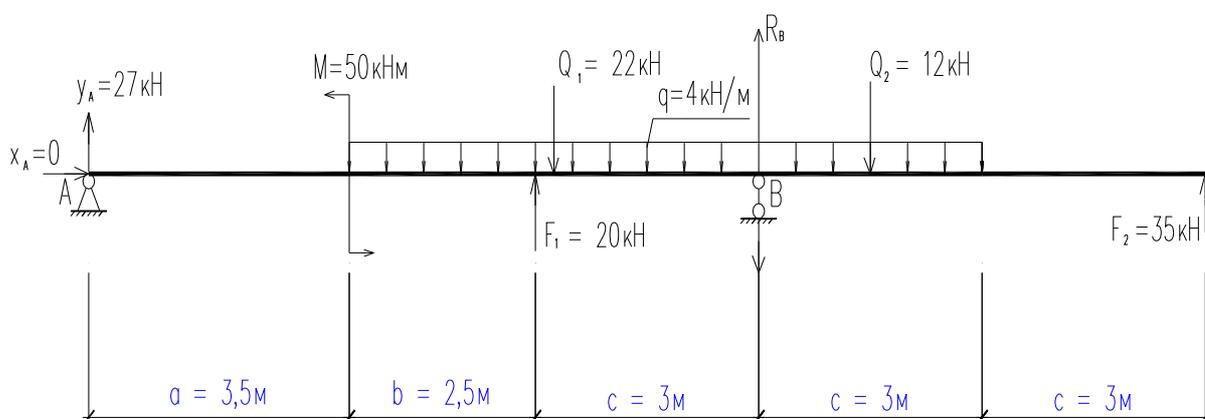


Рис. 1. Заданная двухопорная балка

В точке А (неподвижный шарнир) возникает 2 реакции – вертикальная  $Y_A$  и горизонтальная  $X_A$ . Горизонтальная реакция  $X_A$  равна 0, так как в балке больше нет горизонтальных сил. В точке В (подвижный шарнир) возникает одна вертикальная реакция  $R_B$ .

1. Найдем вертикальную реакцию  $R_B$ . Сумма моментов всех сил относительно точки А равна 0

$$\Sigma M_A(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция  $R_B$  направлена вверх. Заменим равномерно распределенную нагрузку  $q$  сосредоточенной силой  $Q$ , равной  $Q =$

$$= q(b + c + c) = 4(2,5 + 3 + 3) = 34 \text{ кН.}$$

$$M + F_1(a + b) - Q\left(a + \frac{b+2c}{2}\right) + R_B(a + b + c) + F_2(a + b + 3c) = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем  $R_B$ .

$$50 + 20(3,5 + 2,5) - 34(3,5 + 8,5/2) + R_B(3,5 + 2,5 + 3) - 12(3,5 + 2,5 + 3/2) + 3,5 \cdot 15 = 0;$$

$$431,5 + 9 R_B = 0;$$

$$R_B = -48 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции получилось отрицательным, то направление реакции нужно изменить на противоположное.

2. Найдем  $Y_A$ . Сумма моментов всех сил относительно точки В равна 0

$$\Sigma M_B(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде

$$F_2 2c - Q_2 c/2 + Q_1 \left(\frac{b+c}{2}\right) - F_1 c + M - Y_A (a + b + c) = 0.$$

Здесь равномерно распределенная нагрузка  $q$  делится шарниром В на 2 части, поэтому каждая из частей создает момент в противоположные стороны. Заменяем каждую из частей сосредоточенными силами  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Подставим числовые данные в уравнение, найдем  $Y_A$

$$35 \cdot 6 - 12 \cdot 1,5 + 22 \cdot 5,5/2 - 20 \cdot 3 + 50 - 9 Y_A = 0;$$

$$210 - 18 + 60,5 - 60 + 50 = 9 Y_A;$$

$$Y_A = 27 \text{ кН.}$$

3. Сделаем проверку. Сумма проекций всех сил на ось у равна 0

$$\Sigma y_i = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде

$$Y_A + F_1 - Q_1 + Q_2 + R_B + F_2 = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение

$$27 + 20 - 34 - 48 + 35 = 0;$$

$0 = 0$ , следовательно, опорные реакции определены верно.

## ПРИМЕР 2

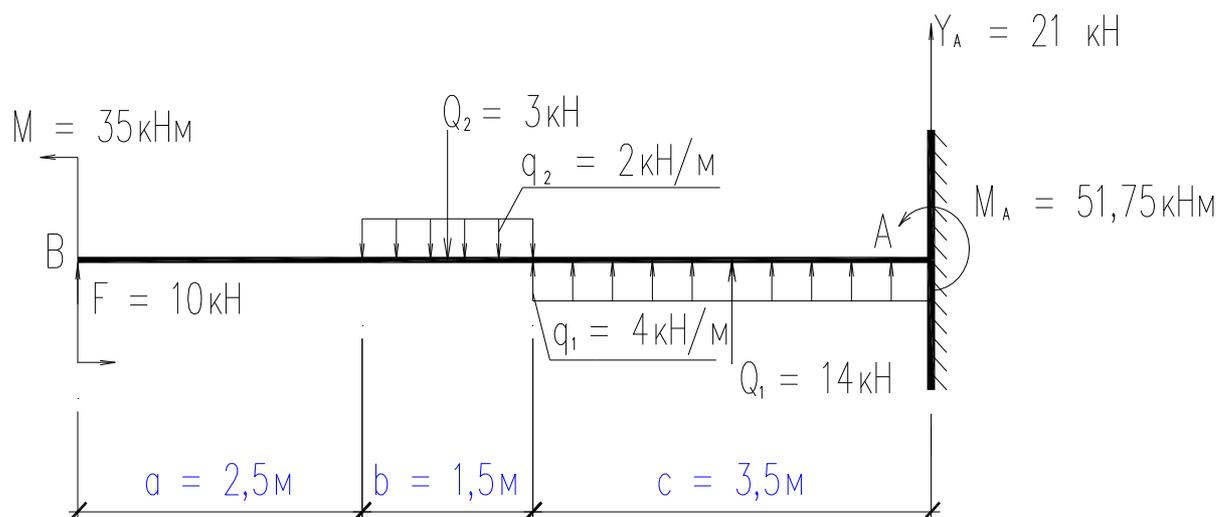


Рис. 2. Заданная консольная балка

В жесткой заделке возникает 3 реакции – вертикальная, горизонтальная и реактивный момент. Горизонтальная реакция  $H_A$  равна 0, так как в балке больше нет горизонтальных сил.

1. Найдем  $M_A$ . Сумма моментов всех сил относительно точки А равна 0

$$\Sigma M_A(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Направление момента примем против часовой стрелки. Это направление будет положительным.

$$M_A - q_1 c \cdot c/2 + q_2 b (c + b/2) - F (c + b + a) + M = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем  $M_A$

$$-4 \cdot 3,5 \cdot 3,5/2 + 2 \cdot 1,5 \cdot (3,5 + 1,5/2) - 10 \cdot (3,5 + 1,5 + 2,5) + 35 = 0;$$

$$M_A - 24,5 + 12,75 - 75 + 35 = 0;$$

$$M_A = 51,75 \text{ кНм.}$$

2. Найдем вертикальную реакцию  $Y_A$ . Сумма моментов всех сил относительно произвольно взятой точки В равна 0 (с учетом найденного момента  $M_A$ )

$$\Sigma M_B(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция  $Y_A$  направлена вверх

$$M - Q_2(a + b/2) + Q_1(a + b + c/2) + M_A + Y_A(a + b + c) = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем  $Y_A$

$$35 - 9,75 + 80,5 + 51,75 + 7,5 Y_A = 0;$$

$$7,5 Y_A = -157,5;$$

$$Y_A = -21 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции получилось отрицательным, то направление реакции нужно изменить на противоположное.

3. Сделаем проверку. Сумма проекций всех сил на ось у равна 0  
 $\Sigma y_i = 0$ .

Запишем уравнение в общем виде

$$Y_A + Q_1 - Q_2 + F = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение

$$-21 + 14 - 3 + 10 = 0;$$

$$0 = 0.$$

## **РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2**

### **«ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР В РАМАХ»**

Вариант задания выдается в виде числа, по которому выбираются номера задач для решения и строка исходных данных из таблиц 5 и 6.

Работы, выполненные не по шифру, преподавателем не проверяются.

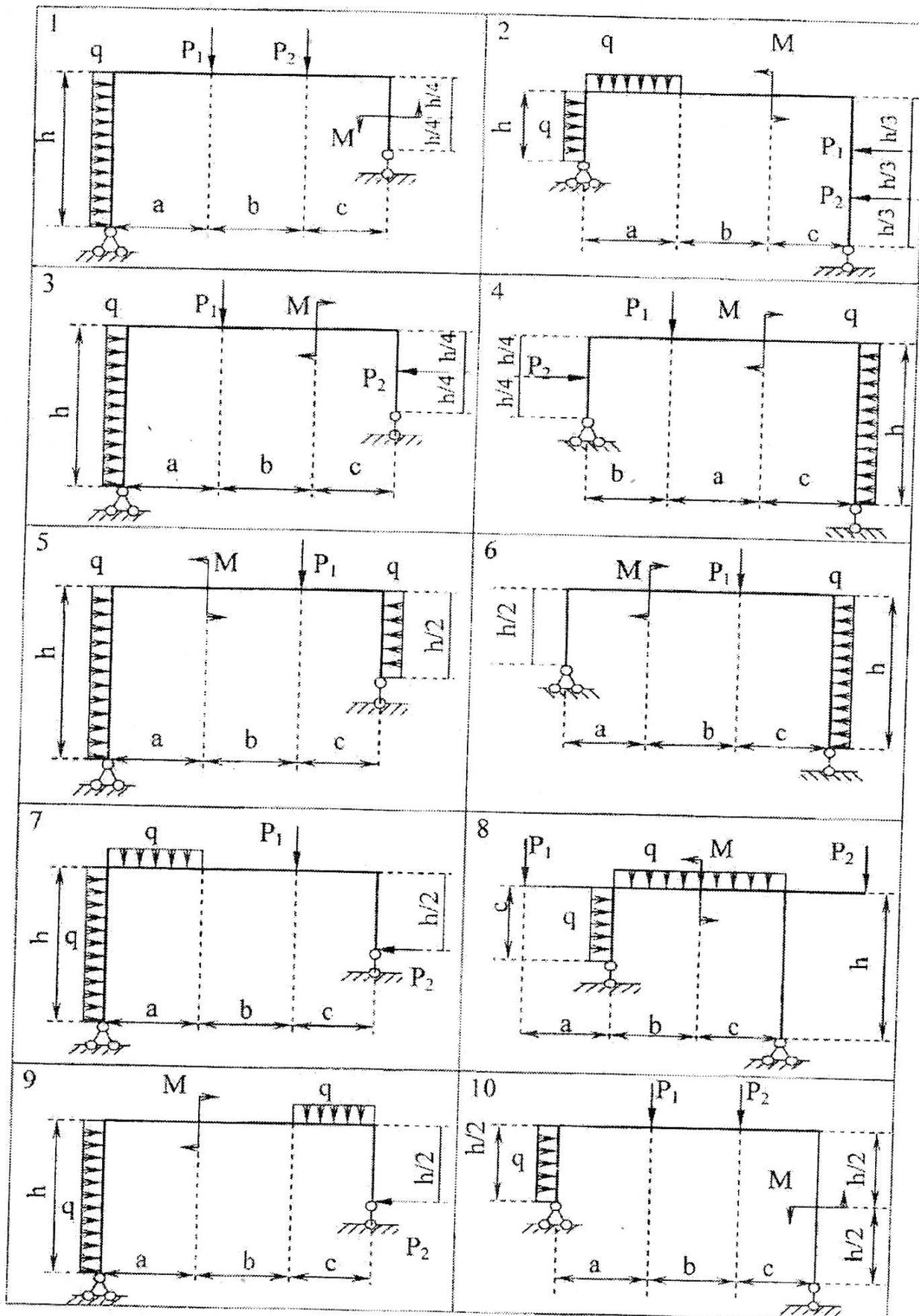
Для заданных рам (табл. 6) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 5 требуется:

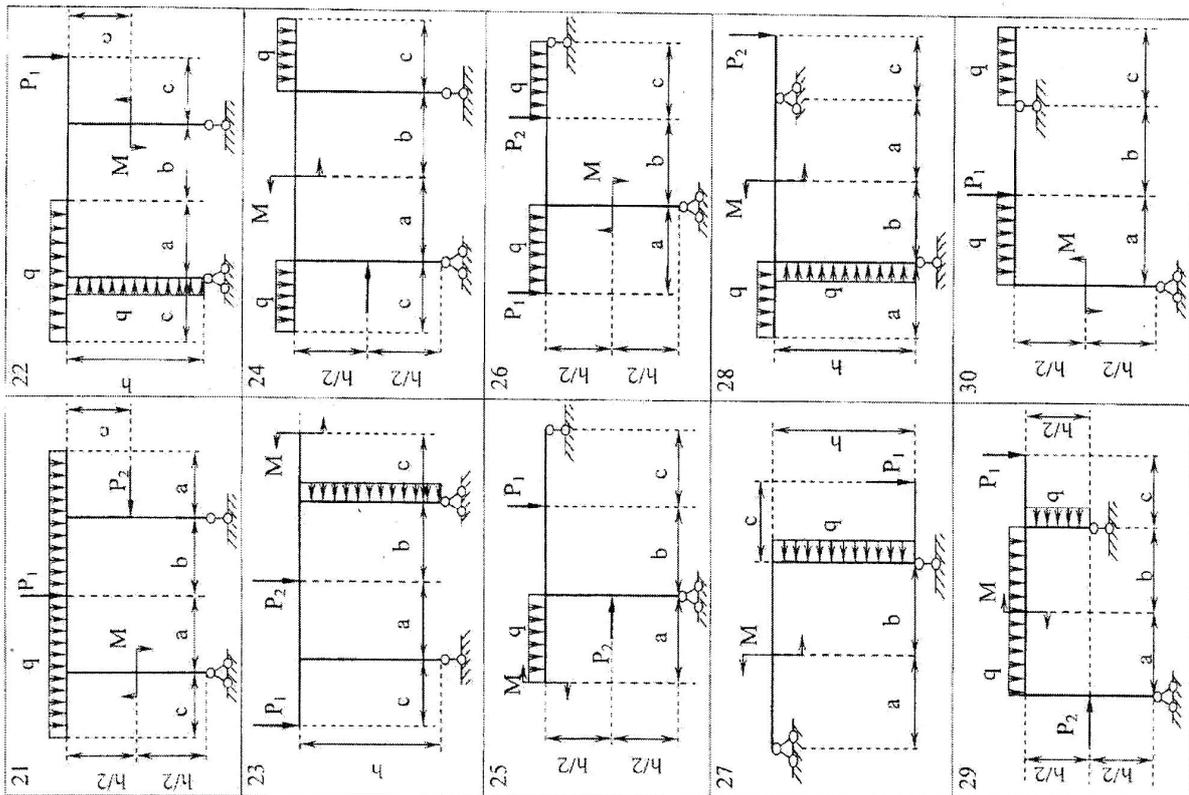
1. Записать уравнения равновесия для определения опорных реакций в общем виде.
2. Определить опорные реакции, подставив в уравнения соответствующие числовые значения.
3. Выполнить проверку найденных опорных реакций.

Исходные данные к РГР № 2

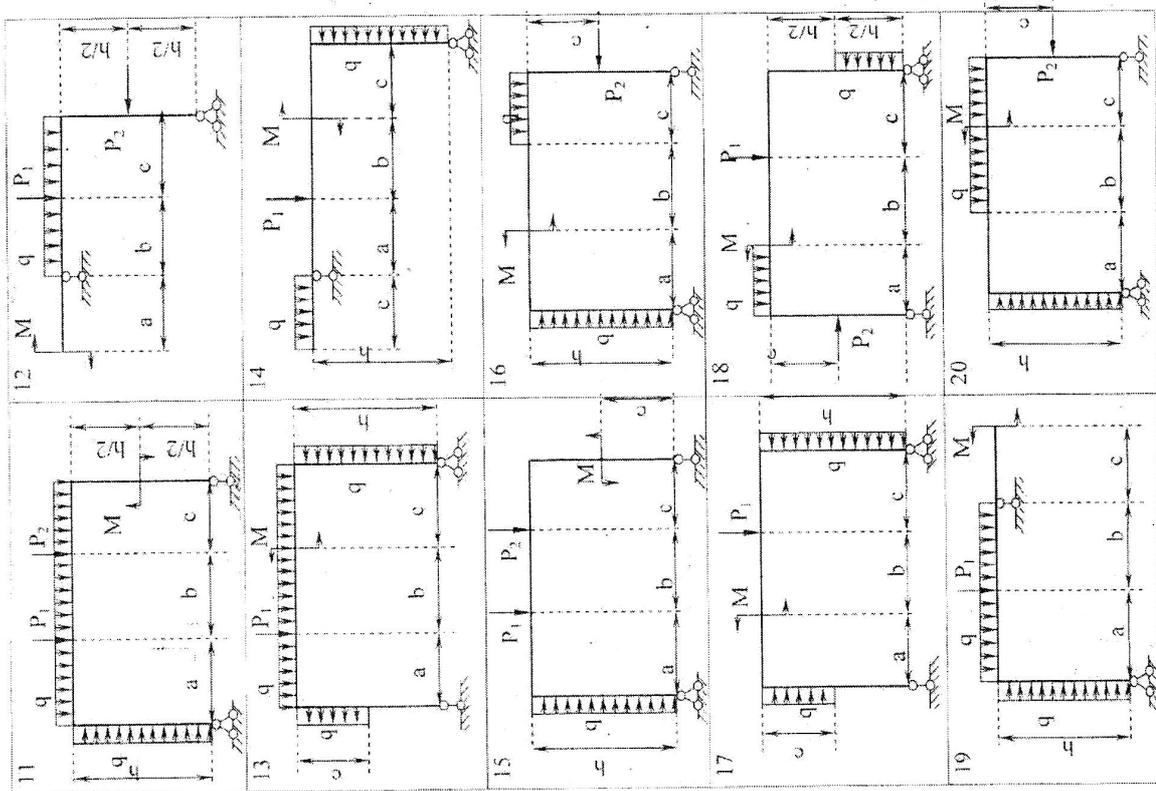
№ П/П	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$F_1, P_1$ кН	$F_2, P_2$ кН	$q, q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$m$ , кНм
1	3	2	1	25	15	6	2	40
2	2	1,5	2	30	25	4	3	45
3	3,5	1	3	20	35	5	4	50
4	2,5	2,5	2,5	35	30	3	5	55
5	2	2	1,5	15	20	2	6	60
6	2,5	1,5	3,5	10	15	4	2	35
7	3,5	2,5	3	15	25	5	3	30
8	2,5	2	2,5	20	35	6	4	45
9	2	1,5	2	30	20	3	5	55
10	3	1	1,5	15	10	2	6	35
11	3,5	2	1	25	30	6	3	40
12	3	2	1	25	15	6	2	40
13	2	1	2	30	25	4	3	45
14	3,5	2,5	3	20	35	5	4	50
15	2,5	2	2	35	30	3	2	55
16	2	1,5	3	15	15	2	3	40
17	2,5	2,5	2,5	10	25	4	4	45
18	3,5	2	1,5	15	35	5	5	50
19	2,5	1,5	3,5	20	30	6	6	55
20	2	1	3	30	20	3	2	60
21	3	2	2,5	15	15	2	3	35
22	3,5	1,5	1	25	25	6	4	30
23	2,5	1	1,5	25	35	4	3	45
24	2,5	2,5	1,5	35	20	5	2	55
25	2	1	3	10	35	4	3	35
26	3	2	2,5	15	30	6	2	40
27	2,5	1,5	2	20	25	2	4	45
28	3,5	1,5	1,5	25	20	3	5	50
29	3	2	1	30	15	5	6	55
30	2,5	2,5	1,5	25	10	6	2	60

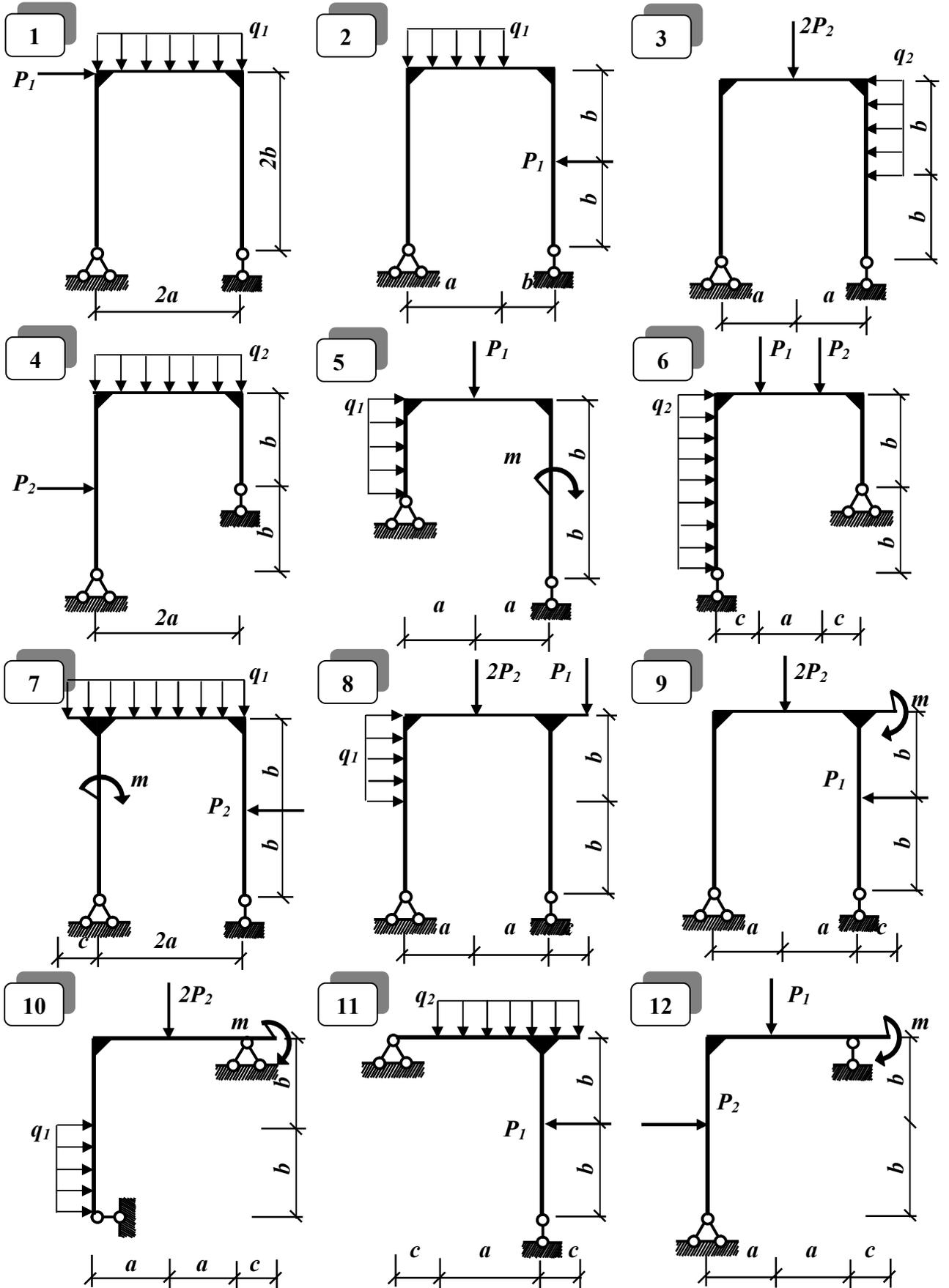
Схемы нагруженных плоских рам



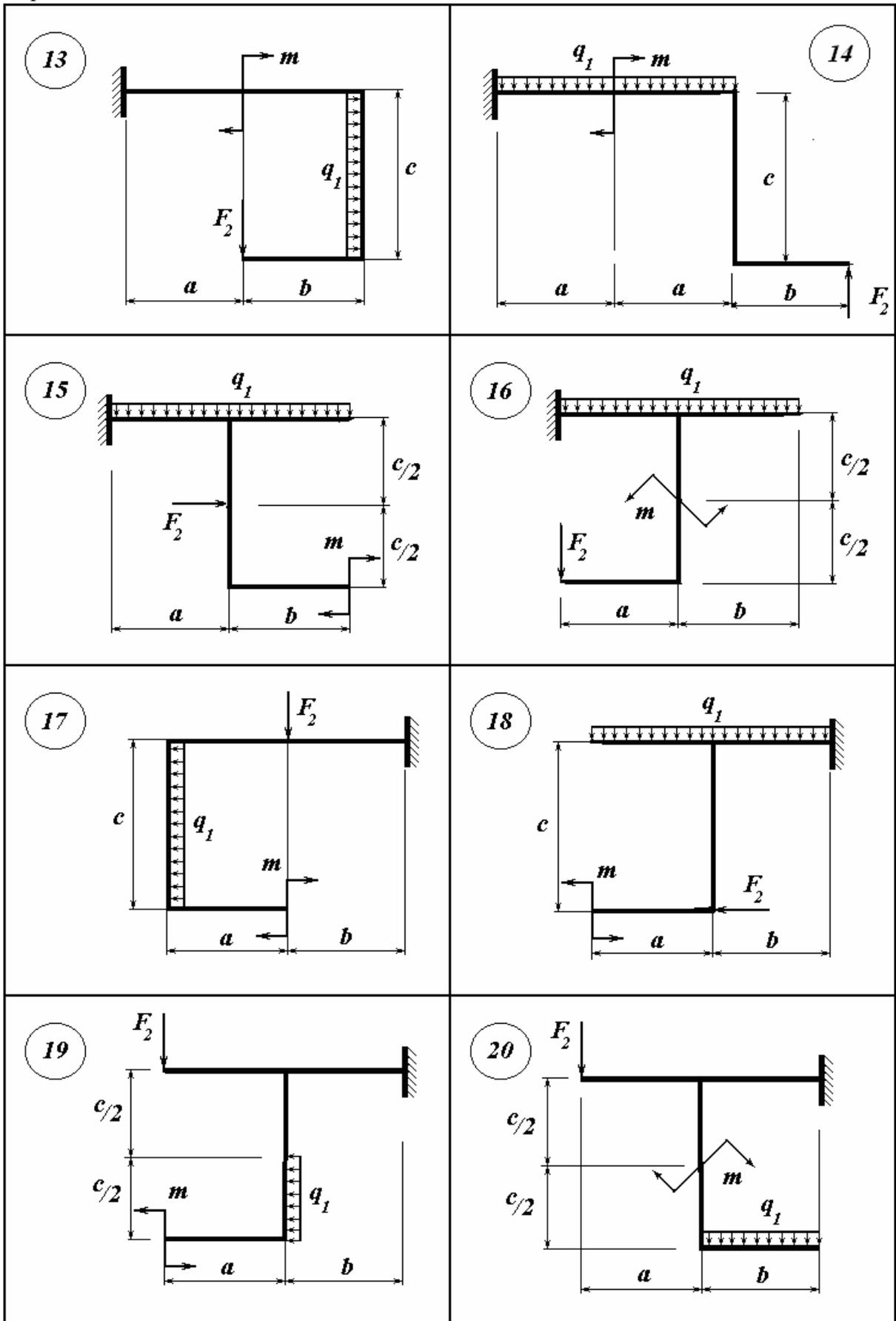


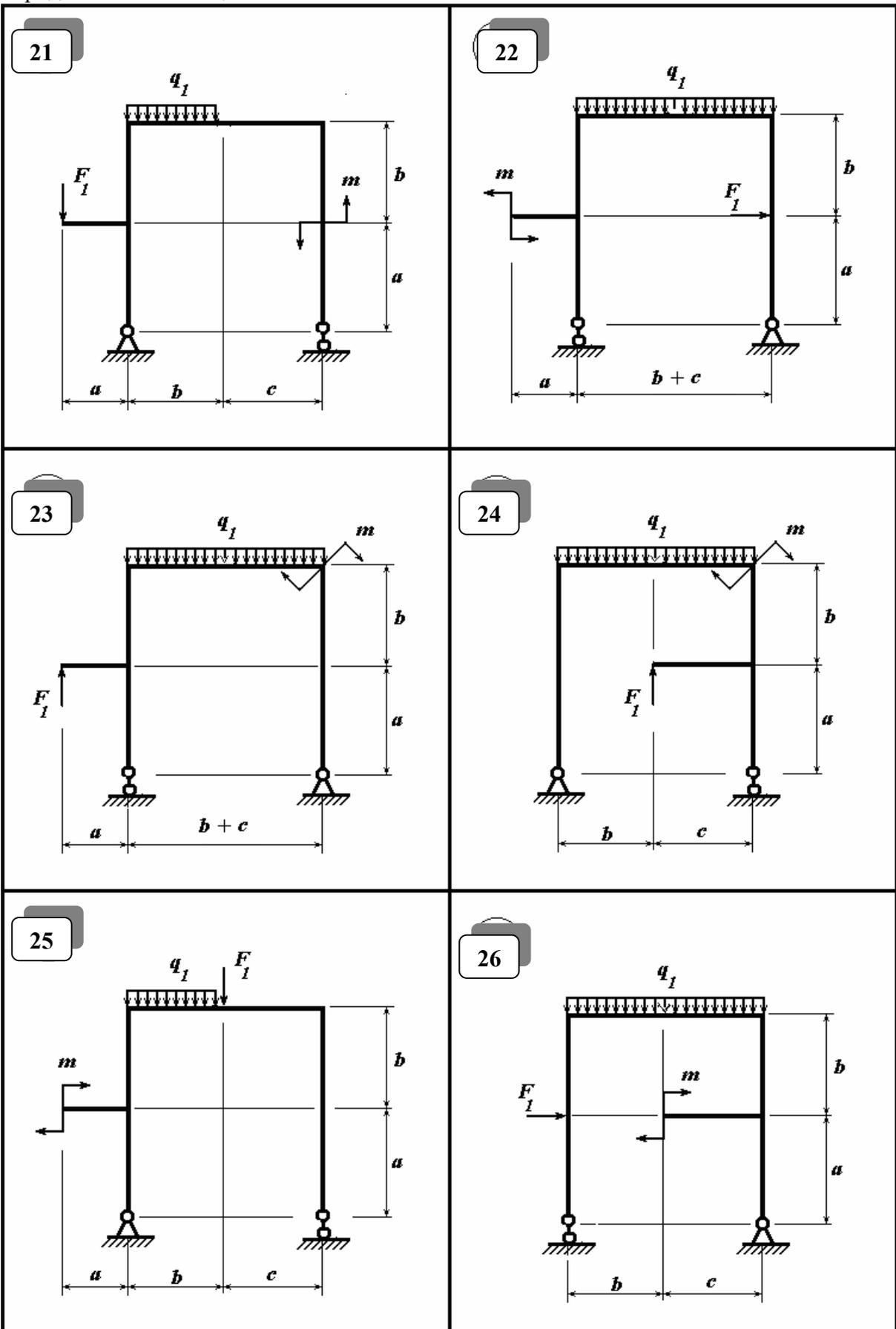
Продолжение табл. 5.4



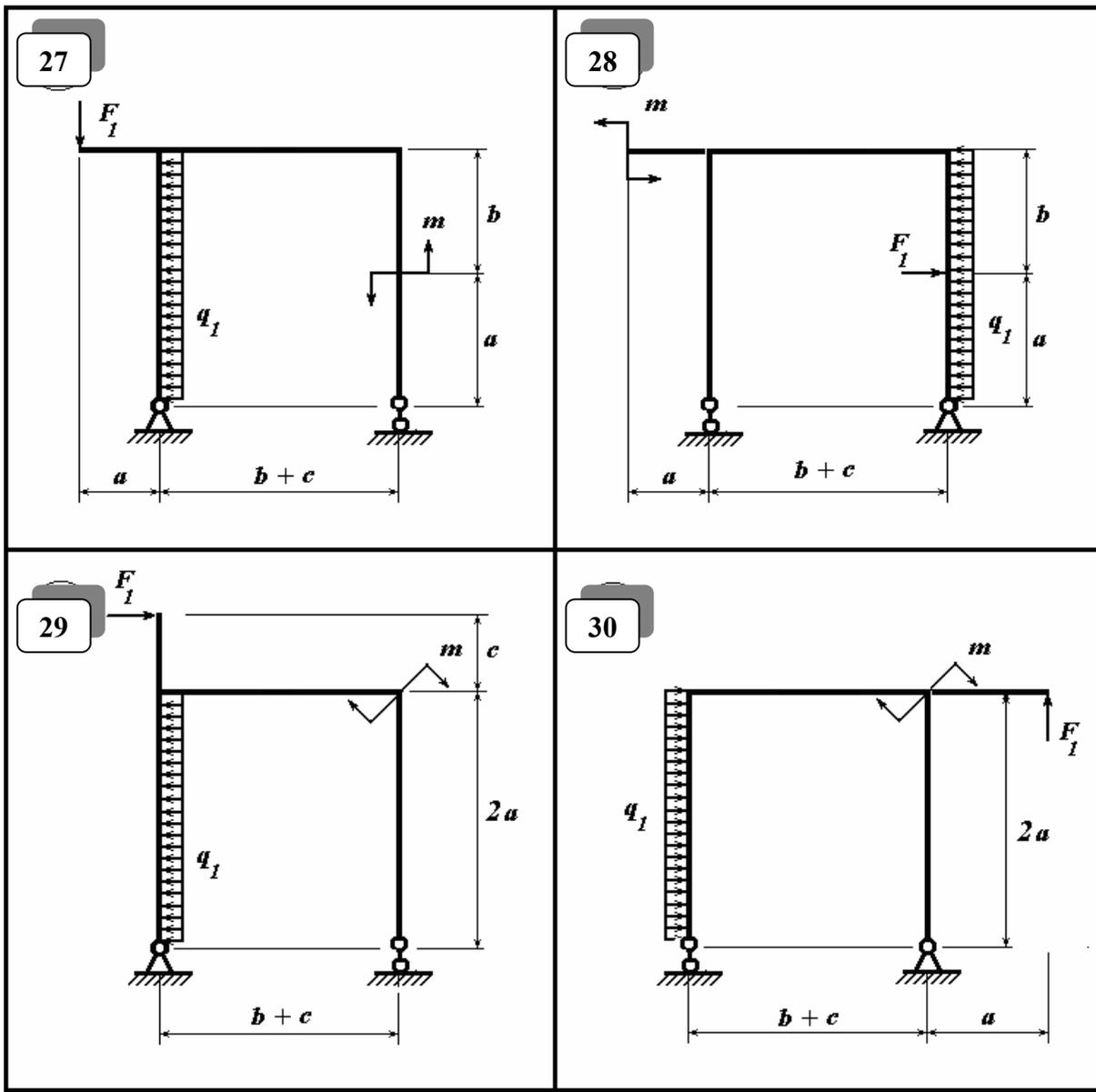


Продолжение таблицы 6.





Продолжение таблицы 6.



## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 2

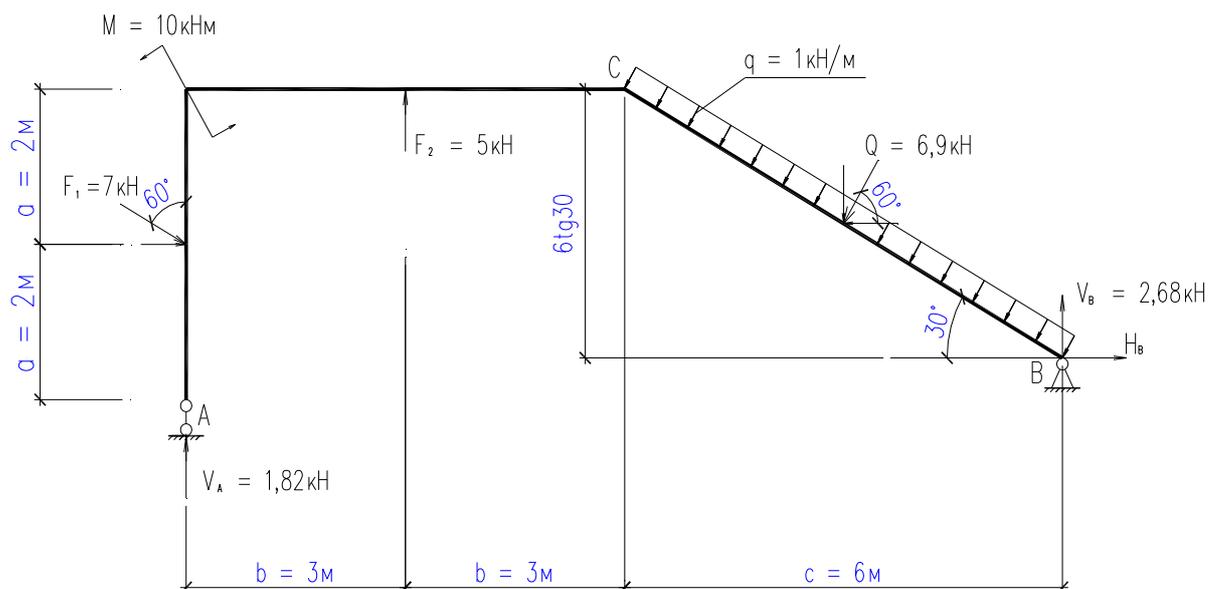


Рисунок 3. Заданная рама

Найдем  $Q$ :  $Q = 6/\cos 30^\circ \cdot 1 = 6,9$  кН.

В точке А (подвижный шарнир) возникает одна вертикальная реакция  $V_A$ .

В точке В (неподвижный шарнир) возникает 2 реакции – вертикальная  $V_B$  и горизонтальная  $H_B$ .

1. Найдем  $V_A$ . Сумма моментов всех сил относительно точки В равна 0

$$\sum M_B (F_i) = 0$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция  $V_A$  направлена вверх

$$V_A (b + b + c) - F_1 \cos 60^\circ (b + b + c) + F_1 \sin 60^\circ (6 \operatorname{tg} 30^\circ - a) - M + F_2 (b + c) - Q \cdot 6/2 \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем  $V_A$

$$V_A (3 + 3 + 6) - 7 \cdot 0,5 (3 + 3 + 6) + 7 \cdot 0,866 (6 \cdot 0,577 - 2) - 10 + 5 \cdot 9 - 6,9 \cdot 6/1,732 = 0;$$

$$12 V_A = 22,04;$$

$$V_A = 1,84 \text{ кН.}$$

2. Найдем  $V_B$ . Сумма проекций всех сил на ось  $y$  равна 0  
 $\sum y_i = 0$ .

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция  $V_B$  направлена вверх

$$V_A + F_2 - F_1 \cos 60^\circ - Q \sin 60^\circ + V_B = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем  $V_B$

$$1,84 + 5 - 7 \cdot 0,5 - 6,9 \cdot 0,866 + V_B = 0;$$

$$V_B = 2,64 \text{ кН.}$$

3. Найдем  $H_B$ . Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна 0  
 $\sum x_i = 0$ .

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция  $H_B$  направлена вправо

$$F_1 \sin 60^\circ - Q \cos 60^\circ + H_B = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем  $H_B$

$$7 \cdot 0,866 - 6,9 \cdot 0,5 + H_B = 0;$$

$$H_B = -2,61 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции получилось отрицательным, то направление реакции нужно изменить на противоположное.

4. Сделаем проверку. Сумма моментов всех сил относительно точки  $C$  равна 0

$$\sum M_C (F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде

$$V_A \cdot 2b - F_1 \cos 60^\circ \cdot 2b - F_1 \sin 60^\circ \cdot 2 - M + F_2 b + Q \cdot 6/2 \cos 30^\circ - V_B c - H_B \cdot 6 \operatorname{tg} 30^\circ = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение

$$1,84 \cdot 6 - 7 \cdot 0,5 \cdot 6 - 7 \cdot 0,866 \cdot 2 - 10 + 5 \cdot 3 + 6,9 \cdot 6/1,732 - 2,64 \cdot 6 + 2,61 \cdot 6 \cdot 0,577 = 0;$$

$$11,04 - 21 - 12,12 - 10 + 15 + 23,9 - 15,84 + 9,04 = 0;$$

$$0,02 \approx 0.$$

### **РГР № 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ**

В состав расчетно-графической работы входят две задачи: сечение, составленное из прокатных профилей, и сечение, составленное из элементарных геометрических фигур. Вариант задания выбирается из таблицы 8.

Часть 1. Определение центра тяжести поперечного сечения, составленного из прокатных профилей.

1.1 Определить геометрические характеристики элементов составного сечения.

1.2 Определить положение центра тяжести заданного сечения.

1.3 Проверить правильность определения центра тяжести составного сечения.

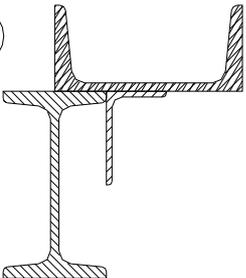
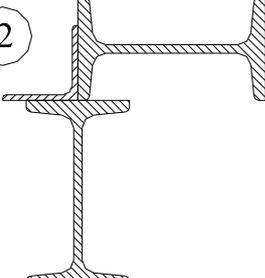
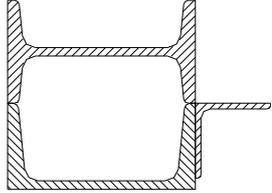
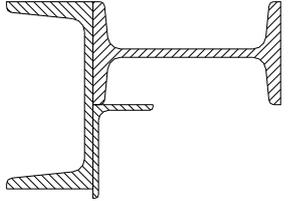
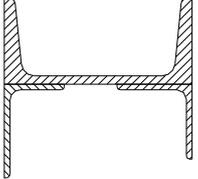
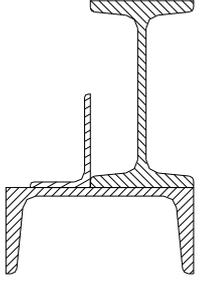
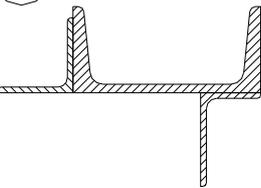
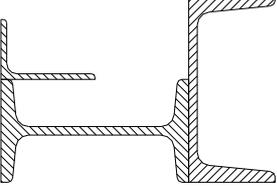
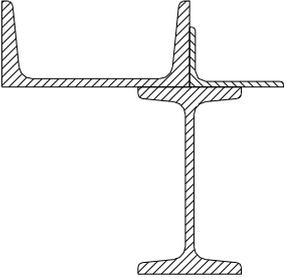
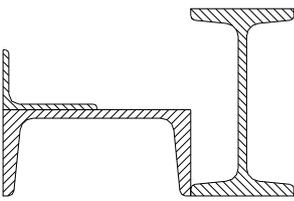
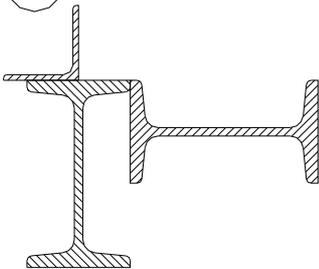
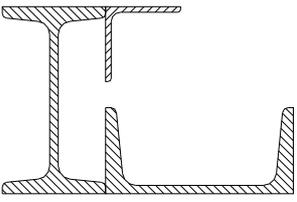
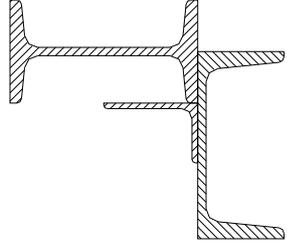
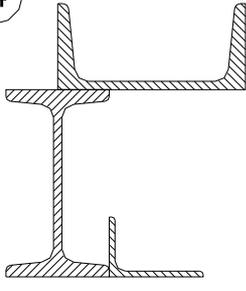
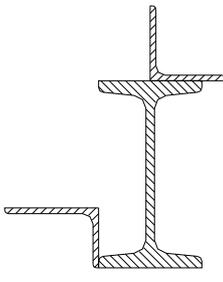
Часть 2. Определение центра тяжести поперечного сечения, составленного из элементарных геометрических фигур.

2.1 Определить геометрические характеристики элементов сечения, составленного из элементарных геометрических фигур.

2.2 Определить положение центра тяжести заданного сечения.

2.3 Проверить правильность определения центра тяжести сечения.

Таблица 7 – Расчетные схемы к задаче № 1

<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 	<p>9</p> 
<p>10</p> 	<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 	<p>15</p> 

Продолжение таблицы 7

<p>16</p>	<p>17</p>	<p>18</p>
<p>19</p>	<p>20</p>	<p>21</p>
<p>22</p>	<p>23</p>	<p>24</p>
<p>25</p>	<p>26</p>	<p>27</p>
<p>28</p>	<p>29</p>	<p>30</p>

Окончание таблицы 7 (часть 2)

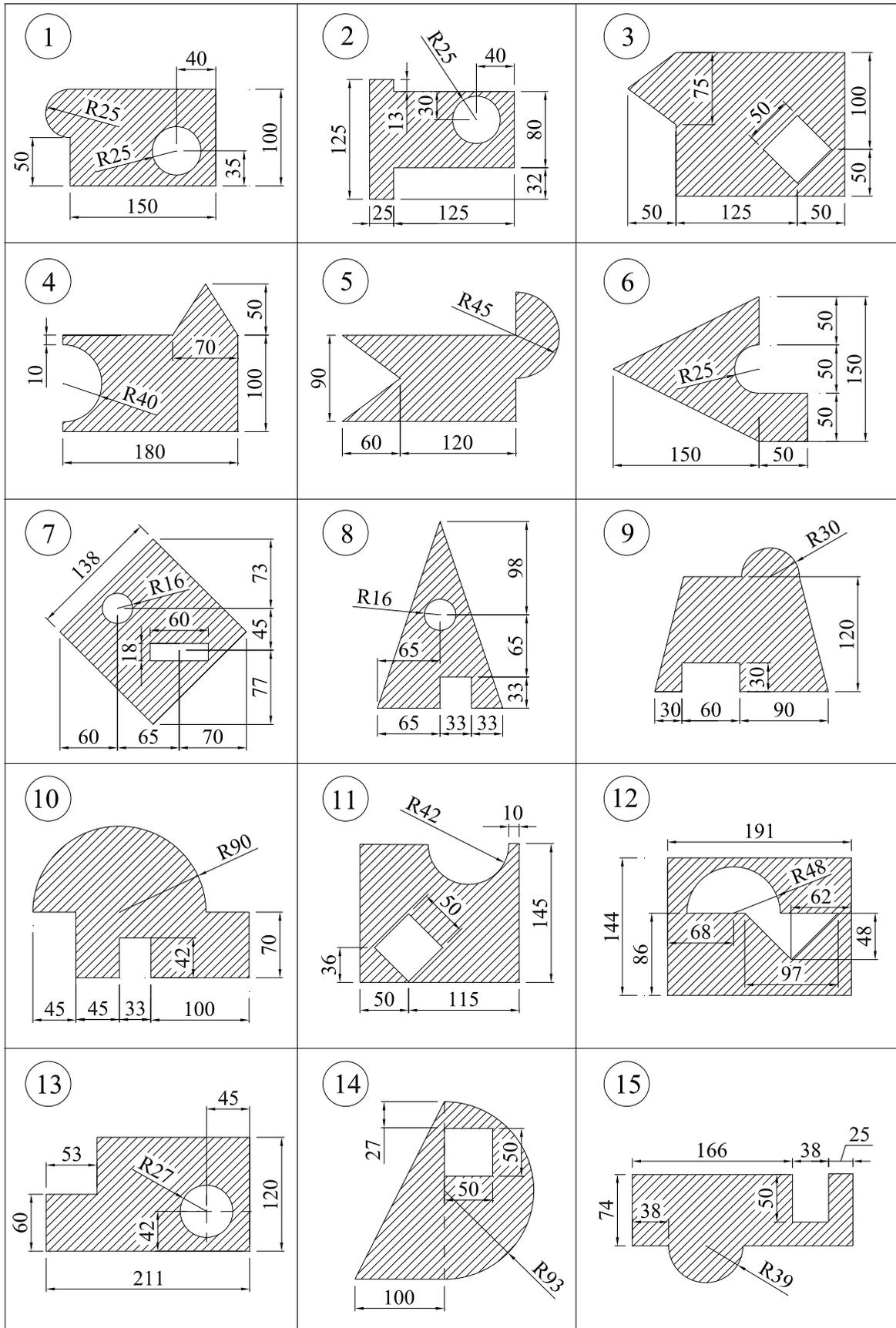
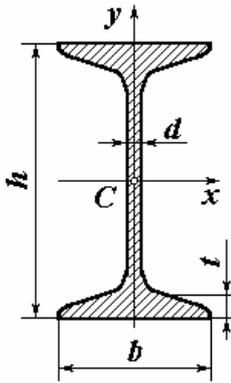


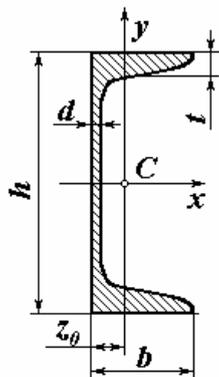
Таблица 8 – Исходные данные к РГР № 3

Вариант, № схемы к задаче 1	Задача № 1				№ схемы к задаче 2
	двутавр №	швеллер №	уголок неравнобокий	уголок равнобокий	
1	18	18	80x50x5	80x80x6	1
2	20	20	90x56x6	90x90x6	2
3	22	22	100x63x6	100x100x7	3
4	24	24	125x80x8	125x125x8	4
5	10	10	50x32x3	50x50x3	5
6	12	12	56x36x4	56x56x4	6
7	14	14	63x40x4	63x63x4	7
8	16	16	75x50x5	75x75x5	8
9	27	27	140x90x8	140x140x9	9
10	30	30	160x100x9	160x160x10	10
11	33	33	180x110x10	180x180x11	11
12	36	36	200x125x12	200x200x12	12
13	40	40	250x160x12	250x250x14	13
14	10	10	50x32x4	50x50x4	14
15	12	12	56x36x5	56x56x5	15
16	14	14	63x40x5	63x63x5	1
17	16	16	75x50x6	75x75x6	2
18	18a	18	80x50x6	80x80x7	3
19	20a	20	90x56x8	90x90x7	4
20	22a	22	100x63x8	100x100x8	5
21	24a	24	125x80x10	125x125x9	6
22	27a	27	140x90x10	140x140x10	7
23	30a	30	160x100x10	160x160x11	8
24	36	33	180x110x12	180x180x12	9
25	40	36	200x125x14	200x200x14	10
26	45	40	250x160x16	250x250x16	11
27	12	10	50x32x4	50x50x3	12
28	10	12	56x36x5	56x56x4	13
29	16	14	63x40x6	63x63x6	14
30	14	16	75x50x8	75x75x7	15



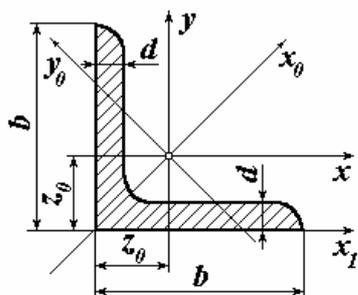
## ДВУТАВРОВЫЕ БАЛКИ ПО ГОСТ 8239-89 (ВЫБОРКА)

№ профиля	Размеры, мм				Геометрические характеристики								Масса 1 п.м., (кг)
	$h$	$b$	$d$	$t$	$A$ , ( $\text{см}^2$ )	$J_x$ , ( $\text{см}^4$ )	$W_{x_2}$ , ( $\text{см}^3$ )	$i_x$ , ( $\text{см}$ )	$S_{x_2}$ , ( $\text{см}^3$ )	$J_y$ , ( $\text{см}^4$ )	$W_{y_2}$ , ( $\text{см}^3$ )	$i_y$ , ( $\text{см}$ )	
10	100	50	4,5	7,2	12,2	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,20	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,30	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,30	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,50	282	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,50	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,70	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,10	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,90	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,80	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,60	1491	1725	182	3,54	108,0



## ШВЕЛЛЕРЫ ПО ГОСТ 8240-97 (ВЫБОРКА)

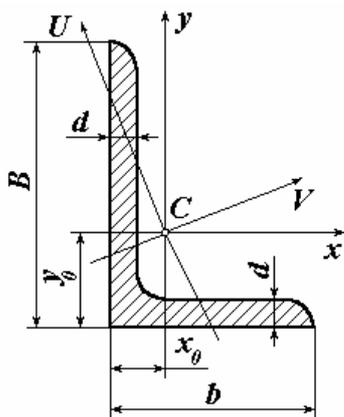
№ профиля	Размеры, мм				Геометрические характеристики									Масса 1 п.м., (кг)
	$h$	$b$	$d$	$t$	$A_x$ ( $\text{см}^2$ )	$J_x$ ( $\text{см}^4$ )	$W_{x_2}$ ( $\text{см}^3$ )	$i_x$ ( $\text{см}$ )	$S_{x_2}$ ( $\text{см}^3$ )	$J_y$ ( $\text{см}^4$ )	$W_{y_2}$ ( $\text{см}^3$ )	$i_y$ ( $\text{см}$ )	$z_0$ ( $\text{см}$ )	
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,30	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,40	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,60	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,80	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,10	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,10	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,40	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,80	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,10	105,0	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,80	113,0	20,5	2,20	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,4	1670	167	8,15	95,90	139,0	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21	21,0
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139,0	208,0	31,6	2,60	2,42	24,0
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,90	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,00	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,10	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,20	350,0	513,0	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,8	61,5	15220	761	15,70	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75	48,3



## УГОЛОК РАВНОПОЛОЧНЫЙ ПО ГОСТ 8509-72 (ВЫБОРКА)

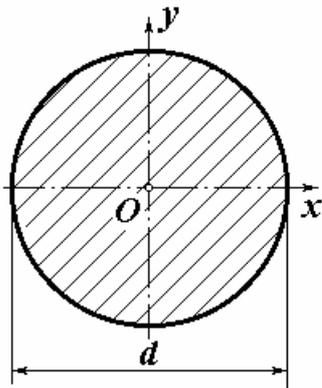
Профиль	Геометрические характеристики									Масса 1 п.м., (кг)
	$A_x$ , ( $\text{см}^2$ )	$J_{x_1}$ , ( $\text{см}^4$ )	$i_{x_1}$ , (см)	$J_{x_0}$ , ( $\text{см}^4$ )	$i_{x_0}$ , (см)	$J_{y_0}$ , ( $\text{см}^4$ )	$i_{y_0}$ , (см)	$J_{x_1}$ , ( $\text{см}^4$ )	$z_0$ , (см)	
50×50×3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	12,38	1,33	2,32
50×50×4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	16,61	1,38	3,05
56×56×4	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	23,28	1,52	3,44
56×56×5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	29,25	1,57	4,25
63×63×4	4,96	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,06	1,69	3,90
63×63×5	6,13	23,10	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
63×63×6	7,28	27,06	1,93	42,94	2,43	11,18	1,24	50,04	1,78	5,72
75×75×5	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	69,62	2,02	5,80
75×75×6	8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	83,92	2,06	6,89
75×75×7	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	98,29	2,10	7,96
80×80×6	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	101,80	2,19	7,36
80×80×7	10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	119,20	2,23	8,51
80×80×8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	136,70	2,27	9,65
90×90×6	10,61	82,10	2,78	130,22	3,50	33,97	1,79	144,70	2,43	8,33
90×90×7	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	169,40	2,47	9,64
90×90×8	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	194,20	2,51	10,93
100×100×7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	231,30	2,71	10,79
100×100×8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	265,20	2,75	12,25
125×125×8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	516,40	3,36	15,46
125×125×9	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,38	2,48	582,00	3,40	17,30
140×140×9	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	818,20	3,78	19,41
140×140×10	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	910,90	3,82	21,45
160×160×10	31,43	774,20	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	1356,0	4,30	24,67
160×160×11	34,42	844,20	4,95	1340,70	6,24	347,77	3,18	1494,0	4,35	27,02
180×180×11	38,80	1216,40	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	2128,0	4,85	30,47
180×180×12	42,19	1316,60	5,59	2092,80	7,04	540,45	3,58	2325,0	4,89	33,12
200×200×12	47,10	1822,80	6,22	2896,20	7,84	749,40	3,99	3182,0	5,37	36,97
200×200×14	54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	3722,0	5,46	42,80
250×250×16	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,1	4,98	8286,0	6,75	61,55

## УГОЛОК НЕРАВНОПОЛОЧНЫЙ ПО ГОСТ 8510-72 (ВЫБОРКА)



Профиль	Геометрические характеристики									Масса I м, (кг)
	$A$ , ( $\text{см}^2$ )	$J_x$ , ( $\text{см}^4$ )	$i_x$ , ( $\text{см}$ )	$J_y$ , ( $\text{см}^4$ )	$i_y$ , ( $\text{см}$ )	$x_0$ , ( $\text{см}$ )	$y_0$ , ( $\text{см}$ )	$J_u \text{ min}$ , ( $\text{см}^4$ )	$i_u \text{ min}$ , ( $\text{см}$ )	
50×32×3	2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	0,72	1,60	1,18	0,70	1,90
50×32×4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	0,76	1,65	1,52	0,69	2,49
56×36×4	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	0,84	1,82	2,19	0,78	2,81
56×36×5	4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	0,88	1,87	2,65	0,78	3,46
63×40×4	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	0,91	2,03	3,07	0,87	3,17
63×40×5	4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	0,95	2,08	3,73	0,86	3,91
63×40×6	5,90	23,31	1,99	7,29	1,11	0,99	2,12	4,36	0,86	4,63
75×50×5	6,11	34,81	2,39	12,47	1,43	1,17	2,39	7,24	1,09	4,79
75×50×6	7,25	40,92	2,38	14,6	1,42	1,21	2,44	8,48	1,08	5,69
75×50×8	9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	1,29	2,52	10,87	1,07	7,43
80×50×5	6,36	41,64	2,56	12,68	1,41	1,13	2,60	7,57	1,09	4,99
80×50×6	7,55	48,98	2,55	14,85	1,40	1,17	2,65	8,88	1,08	5,92
90×56×5,5	7,86	65,28	2,88	19,67	1,58	1,26	2,92	11,77	1,22	6,17
90×56×6	8,54	70,58	2,88	21,22	1,58	1,28	2,95	12,70	1,22	6,70
90×56×8	11,18	90,87	2,85	27,08	1,56	1,36	3,04	16,29	1,21	8,77
100×63×6	9,59	98,29	3,20	30,58	1,79	1,42	3,23	18,20	1,38	7,53
100×63×8	12,57	127,00	3,18	39,21	1,77	1,50	3,32	23,38	1,36	9,87
125×80×8	15,96	255,60	4,00	82,95	2,28	1,84	4,05	48,82	1,75	12,53
125×80×10	19,70	311,60	3,98	100,50	2,26	1,92	4,14	59,33	1,74	15,47
125×80×12	23,36	364,80	3,95	116,80	2,24	2,00	4,22	69,47	1,72	18,34
140×90×8	18,00	363,70	4,49	119,8	2,58	2,03	4,49	70,27	1,98	14,13
140×90×10	22,24	444,50	4,47	145,50	2,56	2,12	4,58	85,51	1,96	17,46
160×100×9	22,87	606,00	5,15	186,00	2,85	2,24	5,19	110,40	2,20	17,96
160×100×10	25,28	666,60	5,13	204,10	2,84	2,28	5,23	121,20	2,19	19,85
180×110×10	28,33	952,30	5,80	276,40	3,12	2,44	5,88	165,40	2,42	22,24
180×110×12	33,69	1122,60	5,77	324,10	3,10	2,52	5,97	194,30	2,40	26,44
200×125×12	37,90	1568,20	6,43	481,90	3,57	2,83	6,54	285,00	2,74	29,74
200×125×14	43,90	1800,80	6,41	550,80	3,54	2,91	6,62	326,50	2,73	34,43
250×160×12	48,30	3147,50	8,07	1032,3	4,62	3,53	7,97	604,10	3,54	37,92
250×160×16	63,70	4091,10	8,02	1332,6	4,58	3,69	8,14	780,60	3,50	49,91

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР



Круг

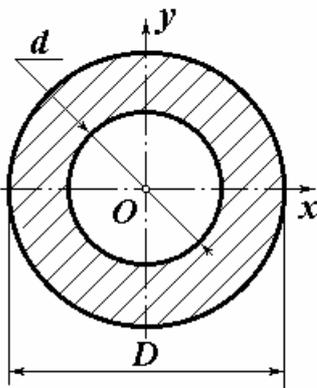
Площадь сечения  $A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,785d^2$ .

Осевые моменты инерции:

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4.$$

Моменты сопротивления:  $W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$ .

Радиусы инерции:  $i_x = i_y = \frac{d}{4}$ .



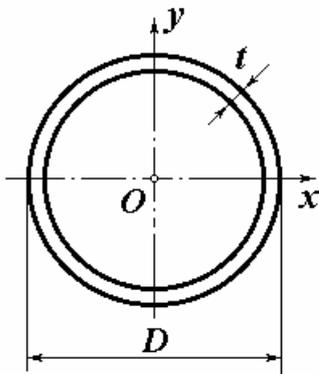
Кольцо

$A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2)$ , где  $\alpha = d/D$ .

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4).$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4).$$

$$i_x = i_y = \frac{D}{4}\sqrt{1 + \alpha^2}.$$



Тонкое кольцо

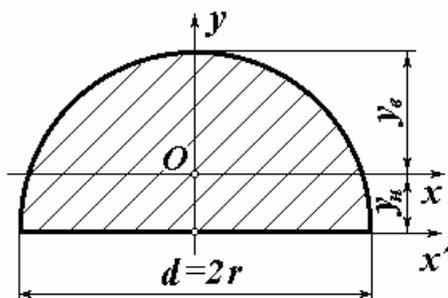
$t \ll D$ .

$A = \pi Dt$ .

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^3 t}{8} \approx 0,3926D^3 t.$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^2 t}{4} \approx 0,7853D^2 t.$$

$$i_x = i_y \approx 0,353D.$$



Полукруг

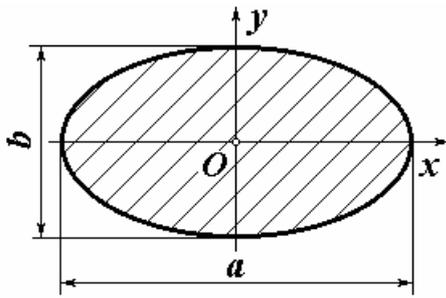
$$A = \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,392d^2.$$

$$y_h = \frac{4r}{3\pi} = 0,2122d; \quad y_e = 0,2878d.$$

$$J_y = J_{x'} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8};$$

$$J_x = 0,14 \frac{\pi d^4}{64} = 0,14 \frac{\pi r^4}{4}.$$

$$W_y = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8}; \quad W_{xh} = 0,2587r^3; \quad W_{xg} = 0,1908r^3.$$



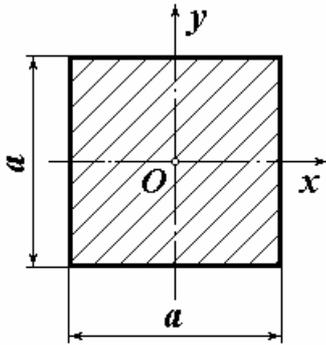
Эллипс

$$A = \frac{\pi}{4} ab.$$

$$J_x = \frac{\pi ab^3}{64}; \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{64}.$$

$$W_x = \frac{\pi ab^2}{32}; \quad W_y = \frac{\pi a^2 b}{32}.$$

$$i_x = b/4; \quad i_y = a/4.$$



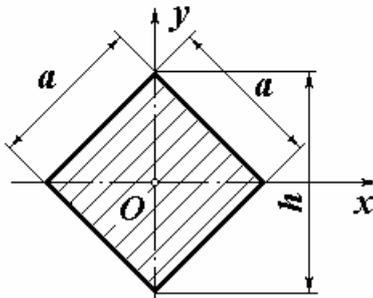
Квадрат

$$A = a^2.$$

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}.$$

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6}.$$

$$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289a.$$



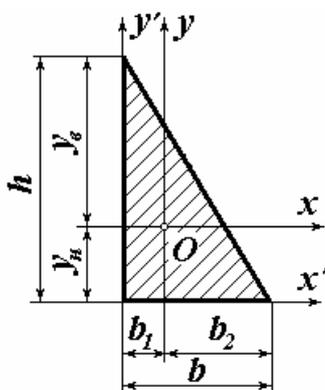
Ромб

$$A = a^2. \quad h = a\sqrt{2}.$$

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}.$$

$$W_x = W_y = 0,118a^3.$$

$$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289a.$$



Прямоугольный  
треугольник

$$A = bh/2.$$

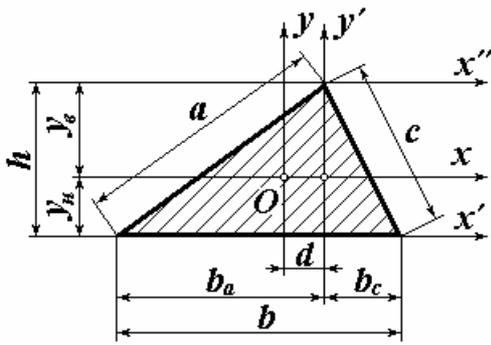
$$y_n = h/3; \quad y_g = 2h/3; \quad b_1 = b/3; \quad b_2 = 2b/3.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{36}; \quad D_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

$$J_{x'} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y'} = \frac{hb^3}{12}; \quad D_{x'y'} = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

$$W_{x_n} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{x_g} = \frac{bh^2}{24}.$$

$$i_x = 0,2357h;$$



Треугольник

$$A = bh / 2.$$

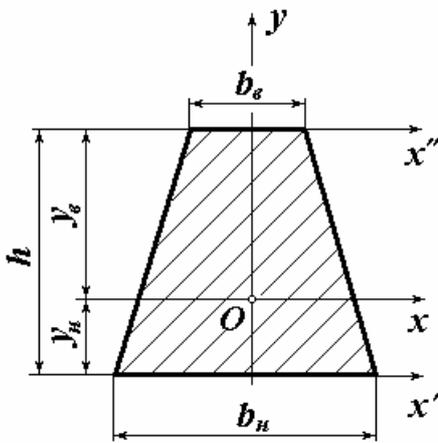
$$y_n = h / 3; \quad y_g = 2h / 3.$$

$$d = (b_a - b_c) / 3.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{x'} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{x''} = \frac{bh^3}{4}.$$

$$J_y = \frac{bh(b^2 - b_a b_c)}{36}; \quad J_{y'} = \frac{h(b_a^3 + b_c^3)}{12}.$$

$$W_{xH} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{xG} = \frac{bh^2}{24}. \quad i_x = 0,2357h$$



Трапеция

$$A = h(b_n + b_g) / 2.$$

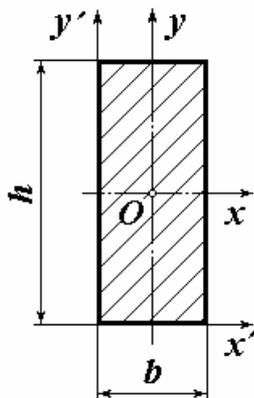
$$y_n = \frac{b_n + 2b_g}{3(b_n + b_g)} h; \quad y_g = \frac{2b_n + b_g}{3(b_n + b_g)} h.$$

$$J_x = \frac{h^3(b_n^2 + 4b_n b_g + b_g^2)}{36(b_n + b_g)}.$$

$$J_y = \frac{h}{48} \cdot \frac{b_n^4 - b_g^4}{b_n - b_g}$$

$$J_{x'} = \frac{h^3(b_n + 3b_g)}{12}; \quad J_{x''} = \frac{h^3(3b_n + b_g)}{12}.$$

$$W_{xH} = \frac{J_x}{y_n}; \quad W_{xG} = \frac{J_x}{y_g}.$$



Прямоугольник

$$A = bh.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3 h}{12}.$$

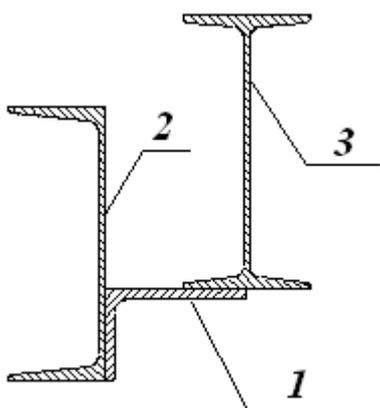
$$J_{x'} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y'} = \frac{b^3 h}{3}; \quad D_{x'y'} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

$$i_x = 0,289h; \quad i_y = 0,289b.$$

## ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 3

### Часть 1. Вычисление центра тяжести поперечного сечения, составленного из прокатных профилей



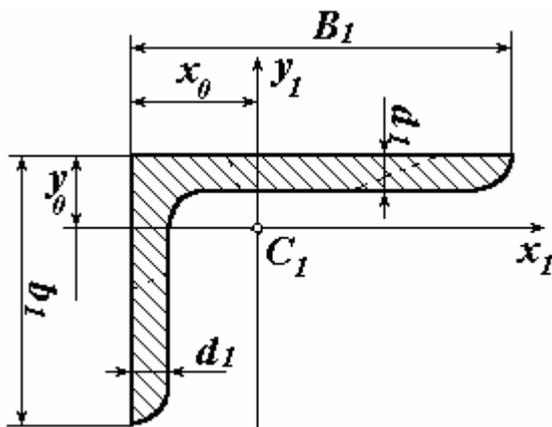
Заданное поперечное сечение состоит из трех элементов:

- 1 – неравнобокий уголок 140x90x10;
- 2 – швеллер № 27;
- 3 – двутавр № 30.

#### 1.1 Определение геометрических характеристик элементов сечения.

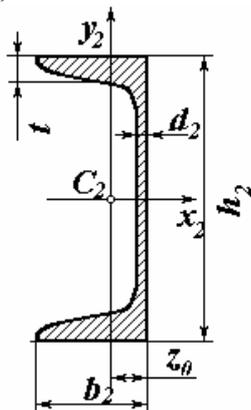
Используя сортамент прокатной стали, находим геометрические характеристики каждого из элементов в отдельности:

а) Элемент № 1 – неравнобокий уголок 140x90x10.



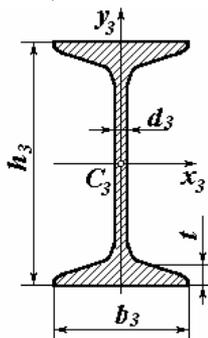
$$\begin{aligned} B_1 &= 14 \text{ см}, \\ b_1 &= 9 \text{ см}, \\ d_1 &= 1 \text{ см}, \\ A_1 &= 22,24 \text{ см}^2, \\ x_0 &= 4,58 \text{ см}, \quad y_0 = 2,12 \text{ см}. \end{aligned}$$

б) Элемент № 2 – швеллер № 27.



$$\begin{aligned} h_2 &= 27 \text{ см}, \\ b_2 &= 9,5 \text{ см}, \\ d_2 &= 0,6 \text{ см}, \\ A_2 &= 35,2 \text{ см}^2, \\ z_0 &= 2,47 \text{ см}. \end{aligned}$$

в) Элемент № 3 – двутавр № 30.



$$\begin{aligned} h_3 &= 30 \text{ см}, \\ b_3 &= 13,5 \text{ см}, \\ d_3 &= 0,65 \text{ см}, \\ A_3 &= 46,5 \text{ см}^2, \end{aligned}$$

### 1.2 Вычисление координат центра тяжести составного сечения.

Выбираем вспомогательную систему координат  $(\xi, \eta)$ , совмещая ее оси с осями одного из элементов. Определяем координаты центров тяжести элементов сечения в новой системе координат (см. рис. 3.2).

$$\begin{aligned} \xi_1 &= z_0 + x_0 = 2,47 + 4,58 = 7,05 \text{ см}, & \eta_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 0, & \eta_2 &= 27/2 - 9 + 2,12 = 6,62 \text{ см}, \\ \xi_3 &= z_0 + B_1 = 2,47 + 14 = 16,47 \text{ см}, & \eta_3 &= 30/2 + 2,12 = 17,12 \text{ см}. \end{aligned}$$

Вычисляем координаты положения центра тяжести всего сечения:

$$\begin{aligned} \xi_c &= \frac{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{22,24 \cdot 7,05 + 35,2 \cdot 0 + 46,5 \cdot 16,47}{22,24 + 35,2 + 46,5} = 8,88 \text{ см}, \\ \eta_c &= \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{22,24 \cdot 0 + 35,2 \cdot 6,62 + 46,5 \cdot 17,12}{22,24 + 35,2 + 46,5} = 9,9 \text{ см}. \end{aligned}$$

По полученным координатам наносим точку С – центр тяжести сечения и проводим через нее центральные оси  $X$  и  $Y$  (см. рис. 3.2).

### 1.3 Вычисление координат центров тяжести элементов сечения в системе центральных осей.

$$\begin{aligned} a_1 &= \eta_1 - \eta_c = 0 - 9,9 = -9,9 \text{ см}, & b_1 &= \xi_1 - \xi_c = 7,05 - 8,88 = -1,83 \text{ см}, \\ a_2 &= \eta_2 - \eta_c = 6,62 - 9,9 = -3,28 \text{ см}, & b_2 &= \xi_2 - \xi_c = 0 - 8,88 = -8,88 \text{ см}, \\ a_3 &= \eta_3 - \eta_c = 17,12 - 9,9 = 7,22 \text{ см}, & b_3 &= \xi_3 - \xi_c = 16,47 - 8,88 = 7,59 \text{ см}. \end{aligned}$$

### 1.4 Проверка правильности определения центра тяжести сечения.

Условие: статический момент относительно центральных осей равен нулю.

$$\begin{aligned} S_X &= A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0, \\ S_X &= 22,24 \cdot (-9,9) + 35,2 \cdot (-3,28) + 46,5 \cdot 7,22 = 335,73 - 335,68 = 0,05 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

$$\text{Погрешность вычислений: } \frac{0,05}{335,68} \cdot 100\% = 0,014\% < 5\%.$$

$$S_Y = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 = 0,$$

$$S_Y = 22,24 \cdot (-1,83) + 35,2 \cdot (-8,88) + 46,5 \cdot 7,59 = 352,94 - 353,18 = -0,24 \text{ см}^3.$$

Погрешности вычислений:  $\frac{0,24}{352,94} \cdot 100\% = 0,06\% < 5\%$ .

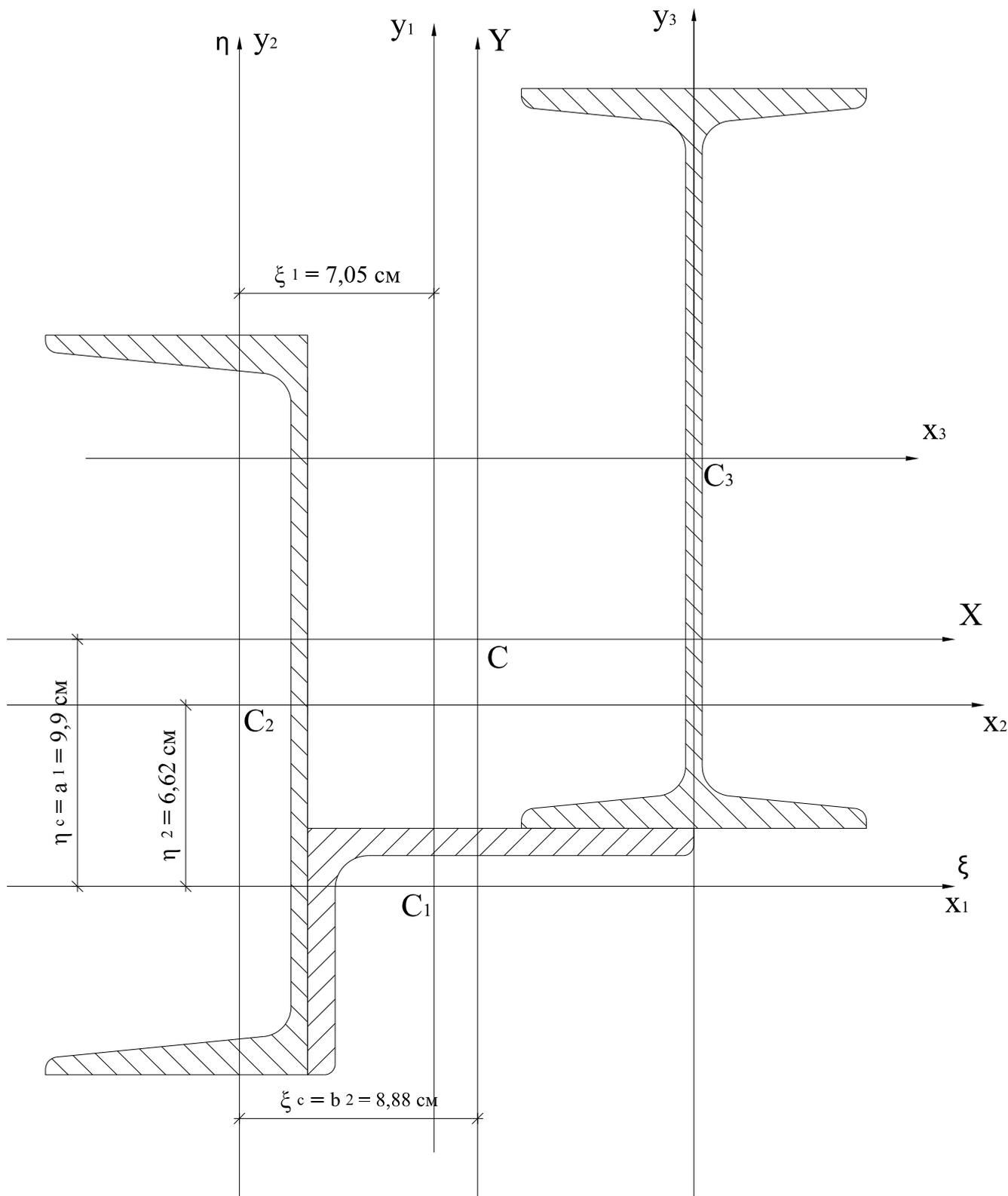
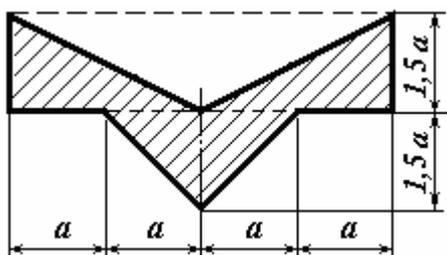


Рисунок 4 – Составное сечение из прокатных профилей

## Часть 2. Вычисление центра тяжести поперечного сечения, составленного из элементарных геометрических фигур

Заданное поперечное сечение состоит из трех элементарных геометрических фигур:



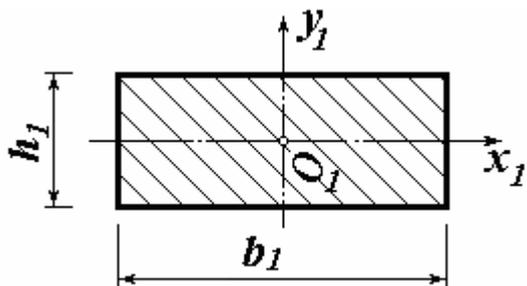
- 1 – прямоугольник  $4a \times 1,5a$ ,
- 2 – вырезанный треугольник,
- 3 – треугольник равнобедренный.

$$a = 3 \text{ см.}$$

### 2.1 Определение геометрических характеристик элементов сечения

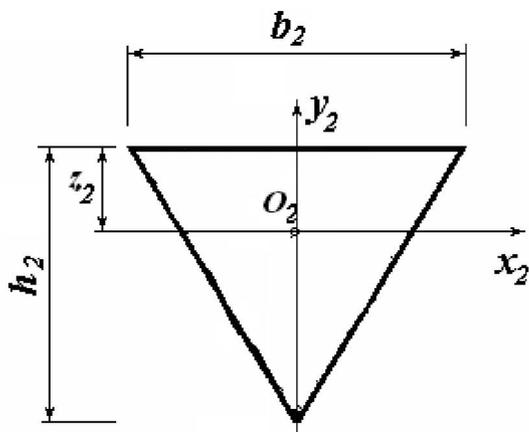
Разбиваем заданное сечение на элементарные геометрические фигуры и, используя известные формулы, находим геометрические характеристики каждого элемента в отдельности:

а) Элемент № 1 – прямоугольник.



$$A_1 = b_1 h_1 = 12 \cdot 4,5 = 54 \text{ см}^2,$$

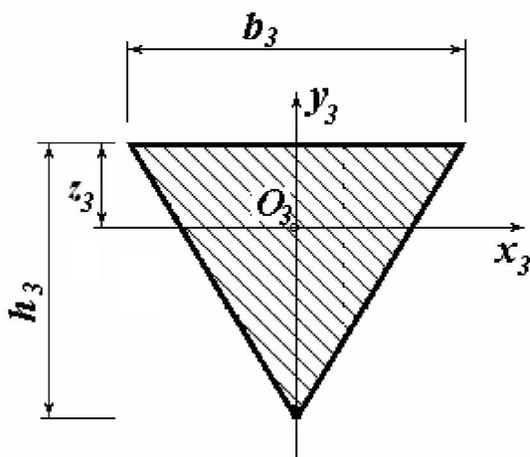
б) Элемент № 2 – вырезанный треугольник.



$$A_2 = -\frac{1}{2} b_2 h_2 = -\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4,5 = -27 \text{ см}^2,$$

$$z_2 = \frac{h_2}{3} = \frac{4,5}{3} = 1,5 \text{ см.}$$

в) Элемент № 3 – равнобедренный треугольник.



$$A_3 = \frac{1}{2} b_3 h_3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,5 = 13,5 \text{ см}^2,$$

$$z_3 = \frac{h_3}{3} = \frac{4,5}{3} = 1,5 \text{ см.}$$

## 2.2 Определение положения центра тяжести сечения

Выбираем вспомогательную систему координат  $(\zeta, \eta)$ , совмещая ее оси с осями одного из элементов. Определяем координаты центров тяжести элементов сечения в новой системе координат (см. рис. 3.3):

$$\zeta_1 = 0, \quad \eta_1 = z_3 + \frac{h_1}{2} = 1,5 + \frac{4,5}{2} = 3,75 \text{ см.}$$

$$\zeta_2 = 0, \quad \eta_2 = z_3 + h_1 - z_2 = 1,5 + 4,5 - 1,5 = 4,5 \text{ см,}$$

$$\zeta_3 = 0, \quad \eta_3 = 0.$$

$$\xi_c = \frac{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 0$$

$$\eta_c = \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{54 \cdot 3,75 + (-27) \cdot 4,5 + 13,5 \cdot 0}{54 - 27 + 13,5} = 2 \text{ см.}$$

По полученным координатам наносим точку С – центр тяжести сечения и проводим через нее центральные оси X и Y (см. рис. 3.3).

2.3 Вычисление координат центров тяжести элементов сечения в системе в системе центральных осей.

$$a_1 = \eta_1 - \eta_c = 3,75 - 2 = 1,75 \text{ см,} \quad b_1 = \xi_1 - \xi_c = 0,$$

$$a_2 = \eta_2 - \eta_c = 4,5 - 2 = 2,5 \text{ см,} \quad b_2 = \xi_2 - \xi_c = 0,$$

$$a_3 = \eta_3 - \eta_c = 0 - 2 = -2 \text{ см.} \quad b_3 = \xi_3 - \xi_c = 0.$$

## 2.4 Проверка правильности определения центра тяжести сечения

Условие: статический момент относительно центральных осей равен нулю.

$$S_X = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 54 \cdot 1,75 + (-27) \cdot 2,5 + 13,5 \cdot (-2) = 0,$$

$$S_Y = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 = 0.$$

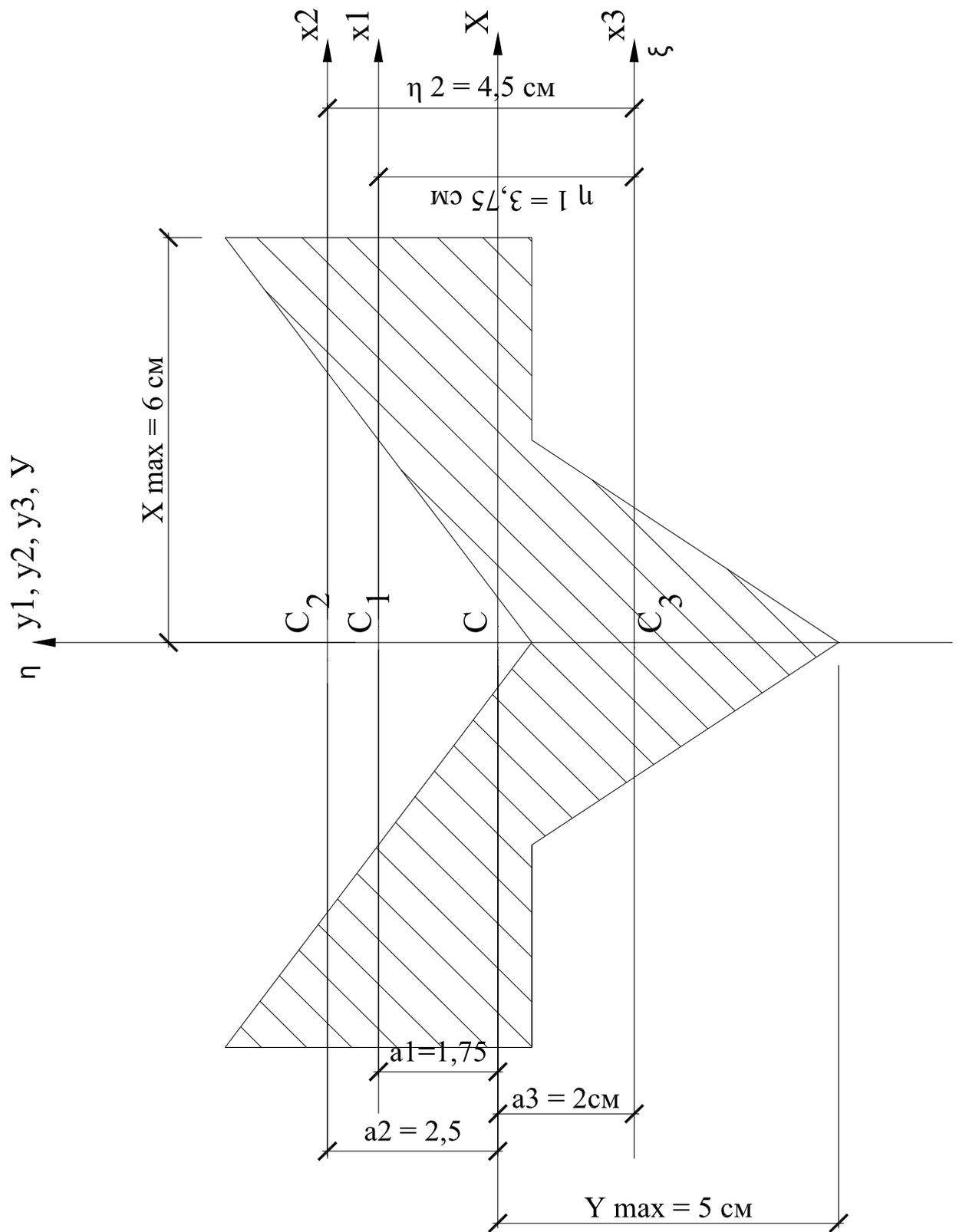


Рисунок 5 – Сечение, составленное из геометрических фигур

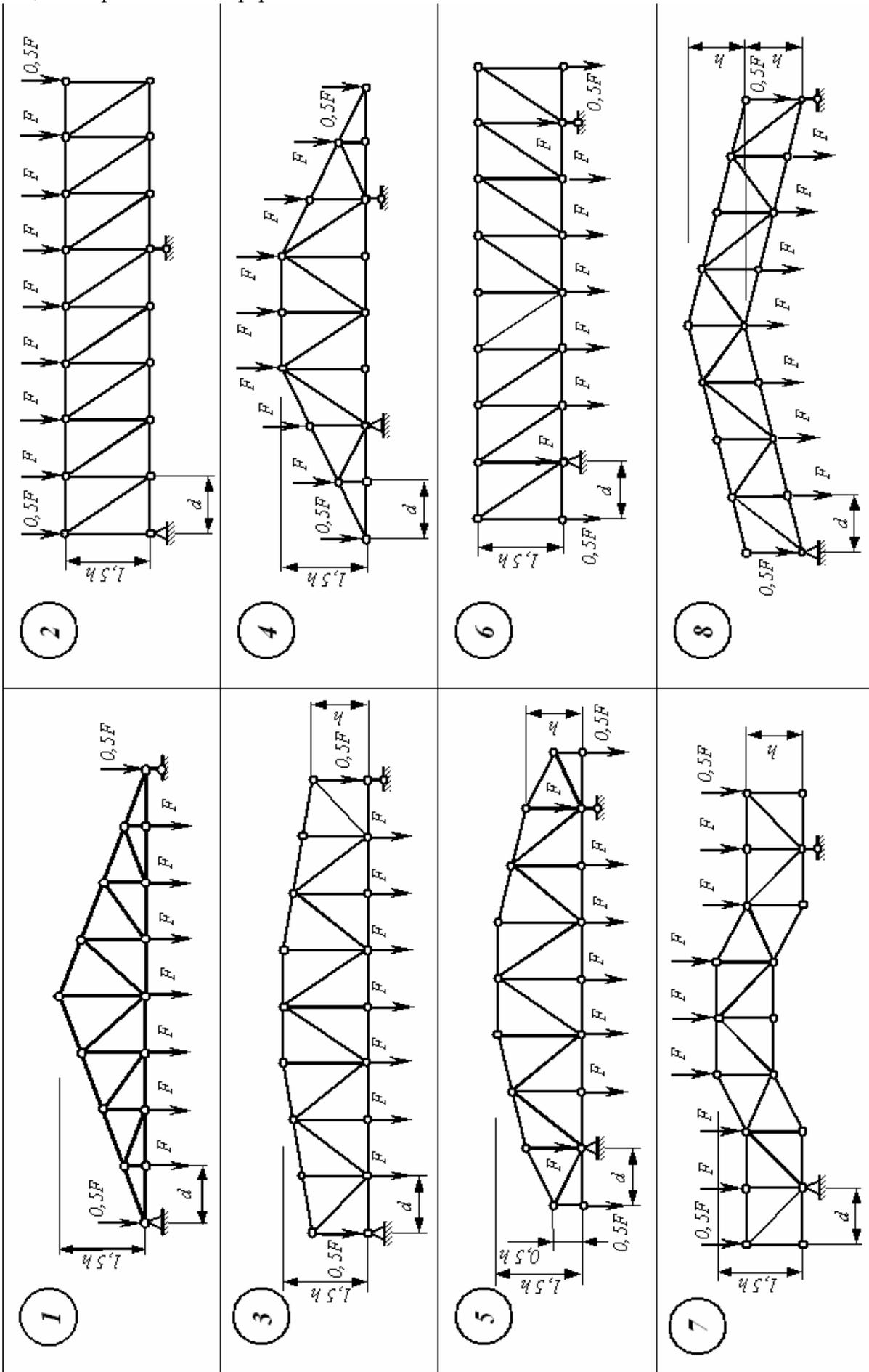
**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4**  
**«ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР И УСИЛИЙ**  
**В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ»**

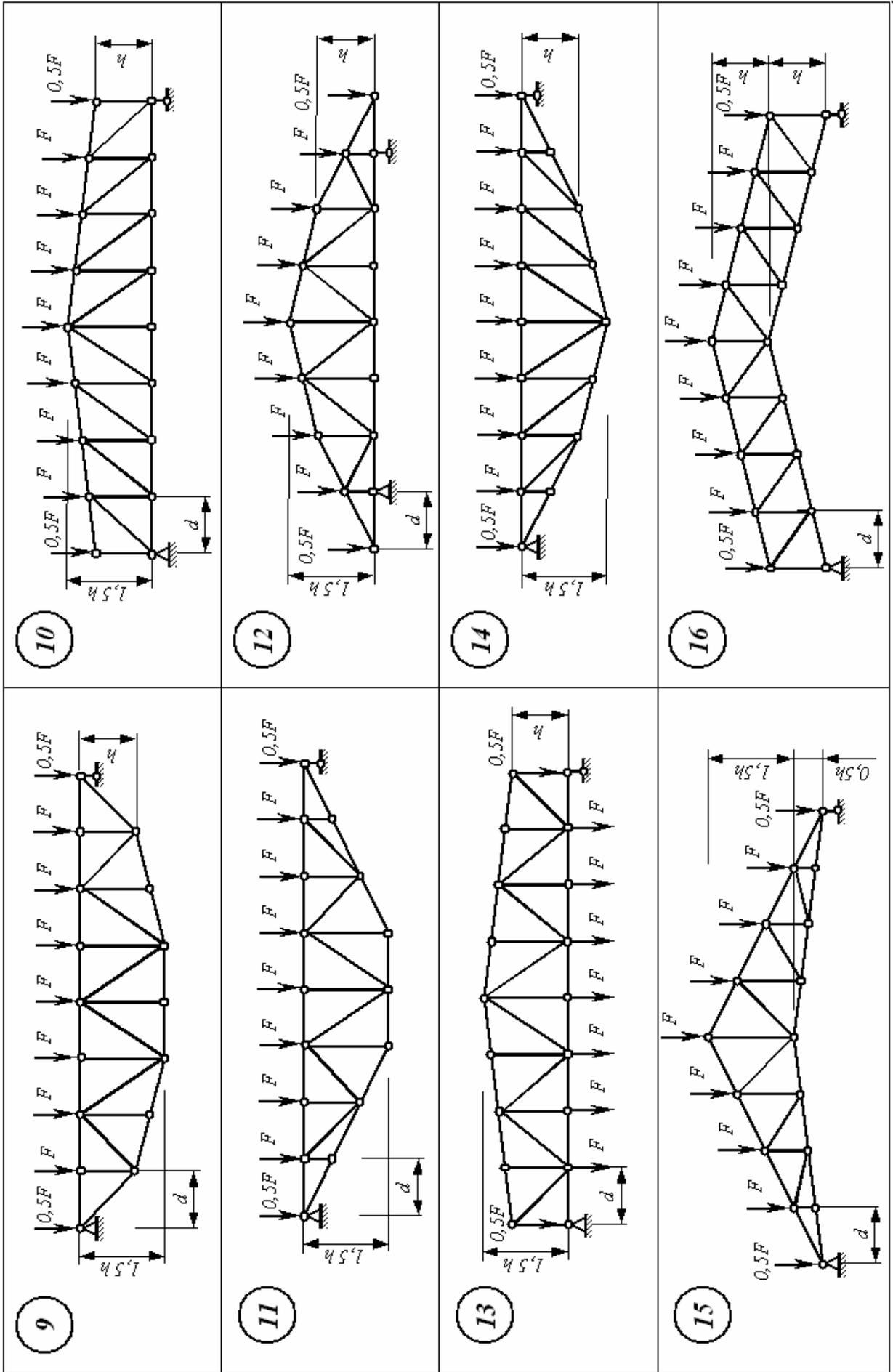
Номер варианта задания выдается в виде числа. По нему выбираются номер схемы фермы (табл. 9) и номер строки исходных данных (табл. 10). Работы, выполненные не по варианту, преподавателем не рецензируются.

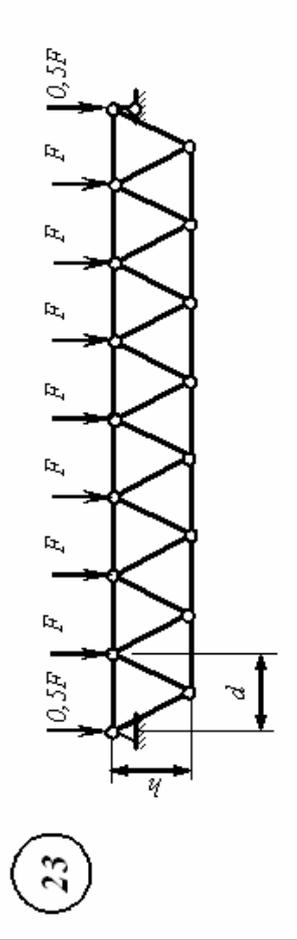
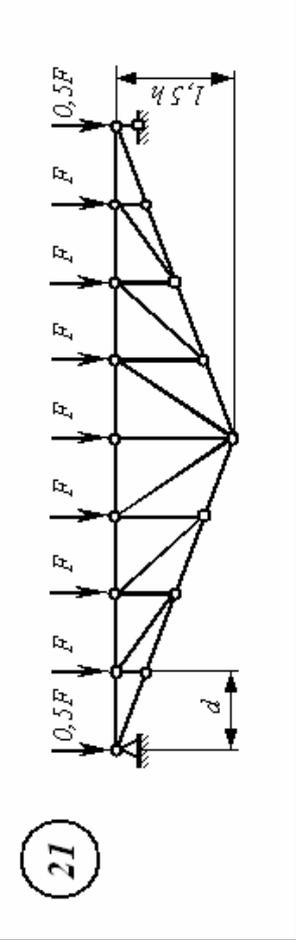
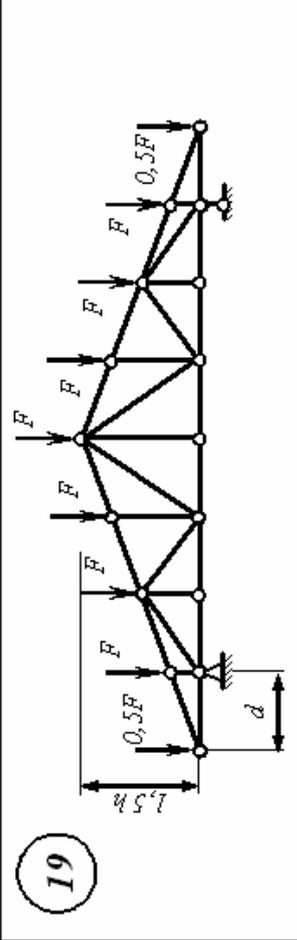
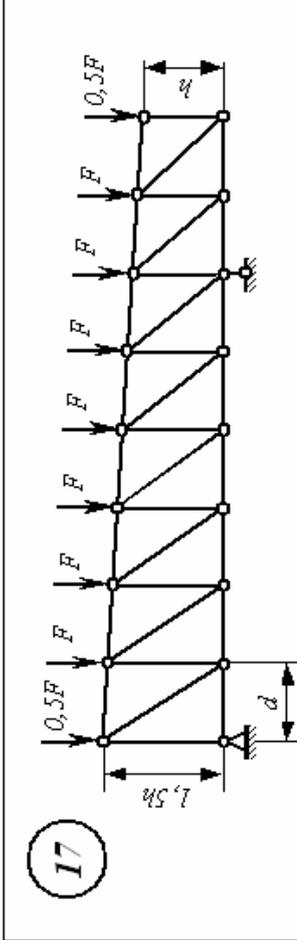
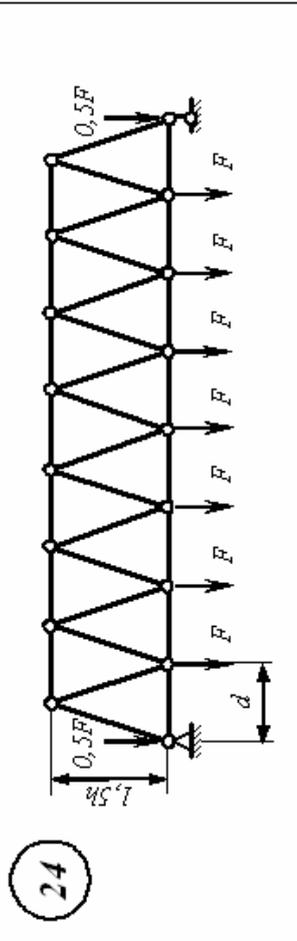
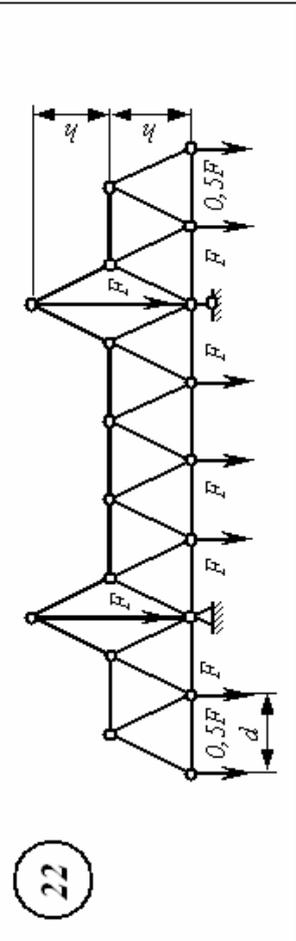
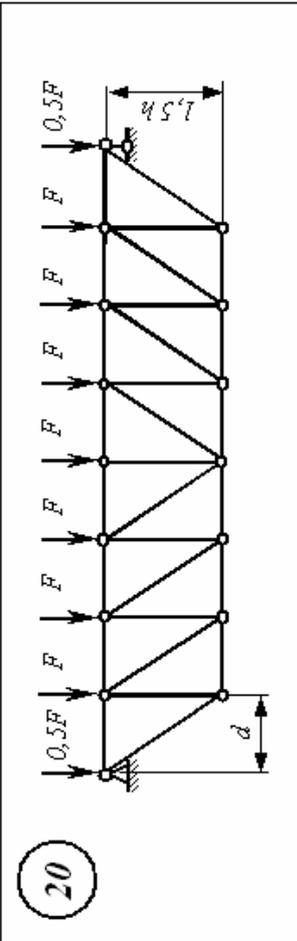
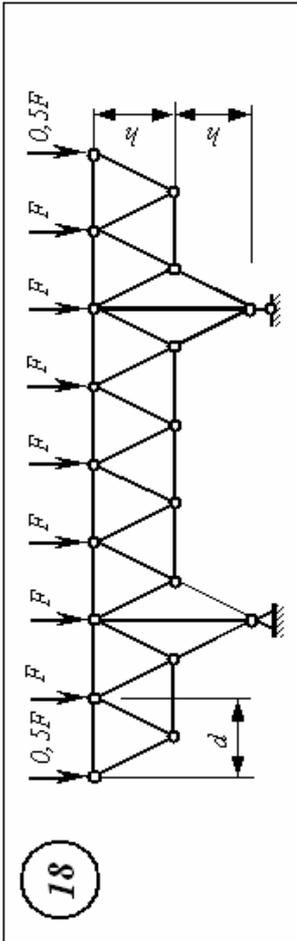
Для заданных ферм (табл. 9) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 10 требуется:

1. Проверить статическую определимость фермы.
2. Определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также усилия во всех ее стержнях методом вырезания узлов.
3. Дополнительно определить в пяти стержнях фермы усилия от той же нагрузки методом Риттера (номер расчетной панели указан в табл. 10) и сравнить полученные результаты с расчетами, выполненными в п. 1.
4. Составить таблицу расчетных усилий для всех стержней фермы.

Таблица 9. Варианты схем ферм







ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ФЕРМ

Таблица 10

Номер варианта, № схемы	Размеры фермы		№ панели (считая слева)	Величина нагрузки	
	$d$ (м)	$h$ (м)		постоянная $F$ (кН)	временная $Q$ (кН)
1	3,1	4,8	2	30	20
2	3,2	4,7	3	25	20
3	3,3	4,6	4	20	10
4	3,4	4,5	5	15	10
5	3,5	4,4	6	10	30
6	3,6	4,3	7	15	30
7	3,7	4,2	6	20	10
8	3,8	4,1	5	25	10
9	3,9	4,9	4	30	30
10	4,0	3,1	3	30	10
11	4,1	3,2	2	25	20
12	4,2	3,3	2	15	20
13	4,3	3,4	3	10	10
14	4,4	3,5	4	30	20
15	4,5	3,6	5	25	30
16	4,6	3,7	6	20	30
17	4,7	3,8	7	15	20
18	4,8	3,9	2	15	10
19	4,9	4,0	3	20	30
20	3,0	4,9	4	25	10
21	2,9	5,0	5	30	20
22	2,8	5,1	6	20	10
23	2,7	5,2	7	10	20
24	2,6	3,0	7	10	30

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 4

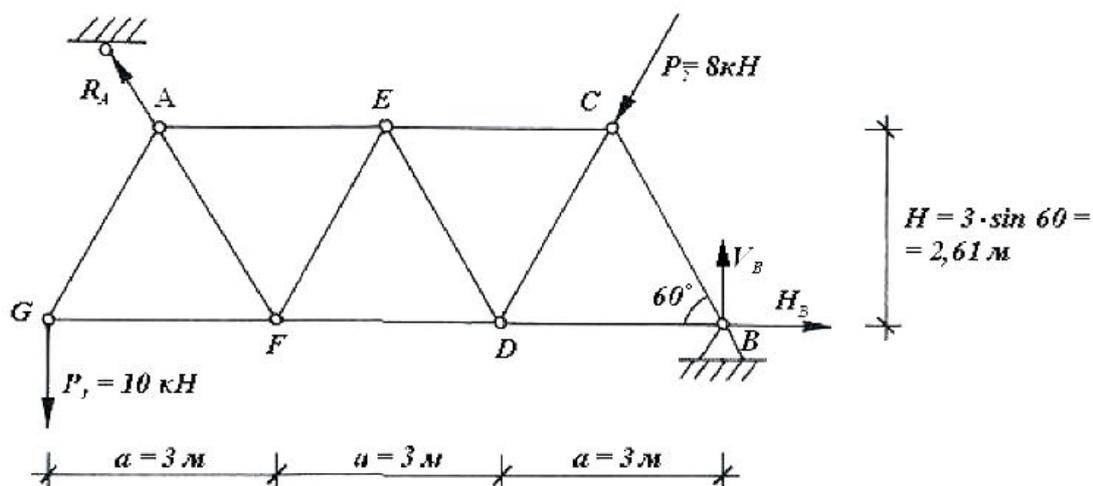


Рисунок 6 - Заданная ферма

I. Проверим статическую определимость фермы:

$$11 = 2 \cdot 7 - 3,$$

$$11 = 11,$$

следовательно ферма статически определима и геометрически неизменяема.

II. Определение реакций опор фермы.

1. Найдем сумму моментов относительно точки В, отсюда найдем реакцию  $R_A$

$$\sum M_B = 0;$$

$$P_2 \sin 60^\circ \cdot a/2 + P_2 \cos 60^\circ \cdot H + P_1 \cdot 3a - R_A \cos 30^\circ \cdot 2,5 a + R_A H \sin 30^\circ = 0;$$

$$8 \cdot 0,87 \cdot 1,5 + 8 \cdot 0,5 \cdot 2,61 + 10 \cdot 9 - R_A \cdot 0,87 \cdot 7,5 + R_A \cdot 2,61 \cdot 0,5 = 0;$$

$$5,22R_A = 90 + 10,44 + 10,44;$$

$$5,22R_A = 110,88;$$

$$R_A = 21,24 \text{ кН.}$$

2. Найдем сумму проекций всех сил на ось Y, отсюда определим реакцию  $V_B$

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A \cos 30^\circ - P_2 \sin 60^\circ + V_B - P_1 = 0;$$

$$21,24 \cdot 0,87 - 8 \cdot 0,87 + V_B - 10 = 0;$$

$$18,48 - 6,96 - 10 = -V_B;$$

$$V_B = -1,52 \text{ кН.}$$

Так как реакция получилась отрицательная, необходимо изменить ее направление на противоположное.

3. Найдем сумму проекций всех сил на ось X, отсюда найдем реакцию  $H_B$

$$\sum X = 0;$$

$$H_B - P_2 \cos 60^\circ - R_A \cos 60^\circ = 0;$$

$$H_B - 8 \cdot 0,5 - 21,24 \cdot 0,5 = 0;$$

$$H_B = 14,62 \text{ кН.}$$

4. Сделаем проверку. Для этого найдем сумму моментов относительно точки C

$$\sum M_C = 0;$$

$$R_A \cos 30^\circ \cdot 2a - P_1 \cdot 2,5a + V_B a/2 - H_B H = 0;$$

$$21,24 \cdot 0,87 \cdot 6 - 10 \cdot 7,5 + 1,52 \cdot 1,5 - 14,62 \cdot 2,61 = 0;$$

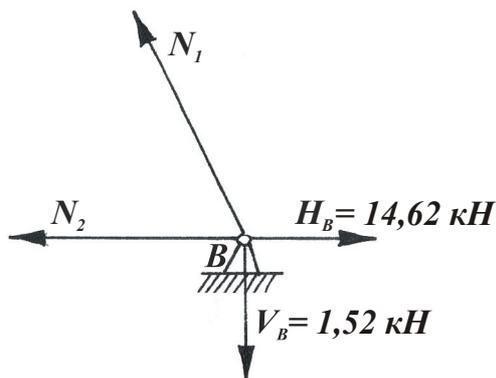
$$110,87 - 75 + 2,28 - 38,16 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

III. Находим усилия в стержнях методом вырезания узлов.

1. Вырезаем узел B



Составим уравнение суммы проекций всех сил на ось Y, отсюда найдем усилие стержня  $N_1$

$$\sum Y = 0;$$

$$N_1 \sin 60^\circ - V_B = 0;$$

$$N_1 \cdot 0,87 - 1,52 = 0;$$

$$N_1 = 1,75 \text{ кН.}$$

Составим уравнение суммы проекций всех сил на ось X, отсюда найдем усилие стержня  $N_2$

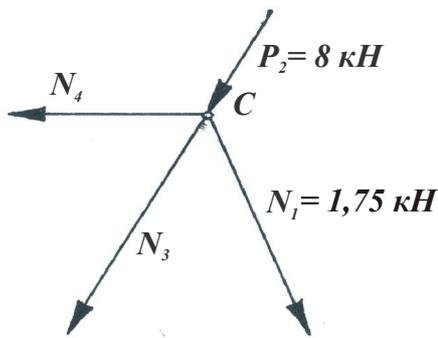
$$\sum X = 0;$$

$$H_B - N_2 - N_1 \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$14,62 - N_2 - 1,75 \cdot 0,5 = 0;$$

$$N_2 = 13,75 \text{ кН.}$$

## 2. Вырезаем узел C



Находим сумму проекций всех сил на ось Y, отсюда вычислим  $N_3$

$$\sum Y = 0;$$

$$- P_2 \sin 60^\circ - N_1 \sin 60^\circ - N_3 \sin 60^\circ = 0;$$

$$- 8 \cdot 0,87 - 0,87 \cdot 1,75 - N_3 \cdot 0,87 = 0;$$

$$N_3 = - 9,75 \text{ кН.}$$

Находим сумму проекций всех сил на ось X, отсюда определим  $N_4$

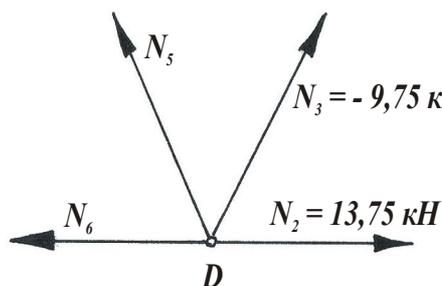
$$\sum X = 0;$$

$$- N_4 - P_2 \cos 60^\circ - N_3 \cos 60^\circ + N_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$N_4 = - 4 + 0,5 \cdot 9,75 + 1,75 \cdot 0,5;$$

$$N_4 = 1,75 \text{ кН.}$$

## 3. Вырезаем узел D



$$\sum Y = 0;$$

$$N_5 \sin 60^\circ + N_3 \sin 60^\circ = 0;$$

$$N_5 \cdot 0,87 - 9,75 \cdot 0,87 = 0;$$

$$N_5 = 9,75 \text{ кН.}$$

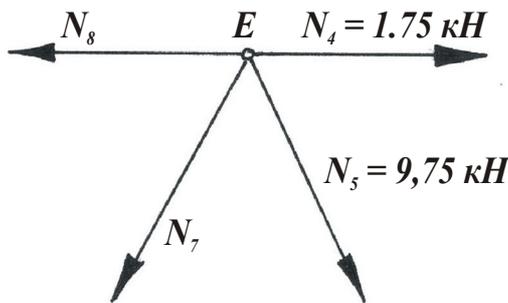
$$\sum X = 0;$$

$$N_2 + N_3 \cos 60^\circ - N_5 \cos 60^\circ - N_6 = 0;$$

$$N_6 = 13,75 - 9,75 \cdot 0,5 - 9,75 \cdot 0,5;$$

$$N_6 = 4 \text{ кН.}$$

#### 4. Вырезаем узел E



$$\sum Y = 0;$$

$$-N_7 \sin 60^\circ - N_5 \sin 60^\circ = 0;$$

$$N_7 \cdot 0,87 = -9,75 \cdot 0,87;$$

$$N_7 = -9,75 \text{ кН.}$$

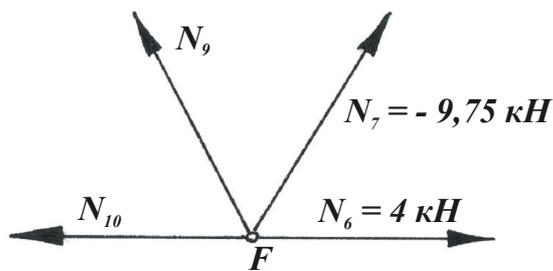
$$\sum X = 0;$$

$$N_4 + N_5 \cos 60^\circ - N_7 \cos 60^\circ - N_8 = 0;$$

$$N_8 = 1,75 + 9,75 \cdot 0,5 + 9,75 \cdot 0,5;$$

$$N_8 = 11,5 \text{ кН.}$$

#### 5. Вырезаем узел F



$$\sum Y = 0;$$

$$N_9 \sin 60^\circ + N_7 \sin 60^\circ = 0;$$

$$N_9 \cdot 0,87 - 9,75 \cdot 0,87 = 0;$$

$$N_9 = 9,75 \text{ кН.}$$

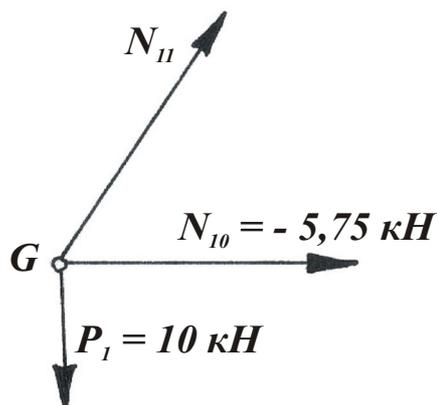
$$\sum X = 0;$$

$$-N_{10} + N_6 + N_7 \cos 60^\circ - N_9 \cos 60^\circ = 0;$$

$$N_{10} = 4 - 0,5 \cdot 9,75 - 0,5 \cdot 9,75;$$

$$N_{10} = -5,75 \text{ кН.}$$

## 6. Вырезаем узел G



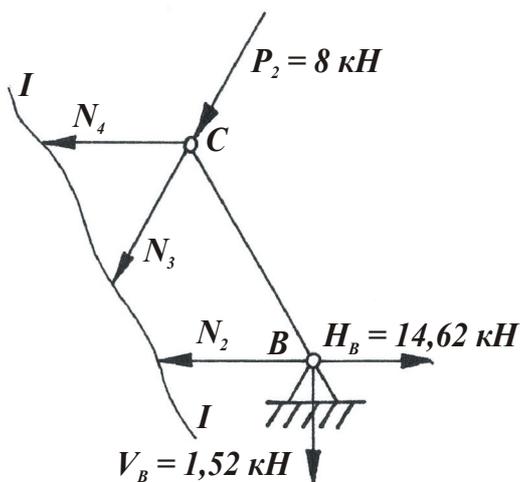
$$\sum Y = 0;$$

$$N_{11} \sin 60^\circ - P_1 = 0;$$

$$N_{11} = 11,49 \text{ кН};$$

IV. Выполним проверку найденных усилий в стержнях № 2, 3, 4, 6, 7, 8 методом сечений (методом Риттера).

1. Проведём сечение I–I через стержни № 2, 3, 4 и рассмотрим правую часть фермы.



$$\sum M_C = 0;$$

$$N_2 H - H H_B + V_B a/2 = 0;$$

$$2,61 N_2 - 2,61 \cdot 14,62 + 1,52 \cdot 1,5 = 0;$$

$$N_2 = 13,75 \text{ кН}.$$

$$\sum Y = 0;$$

$$- P_2 \sin 60^\circ - V_B - N_3 \sin 60^\circ = 0;$$

$$- 0,87 \cdot 8 - 1,52 - N_3 \cdot 0,87 = 0;$$

$$N_3 = - 9,75 \text{ кН}.$$

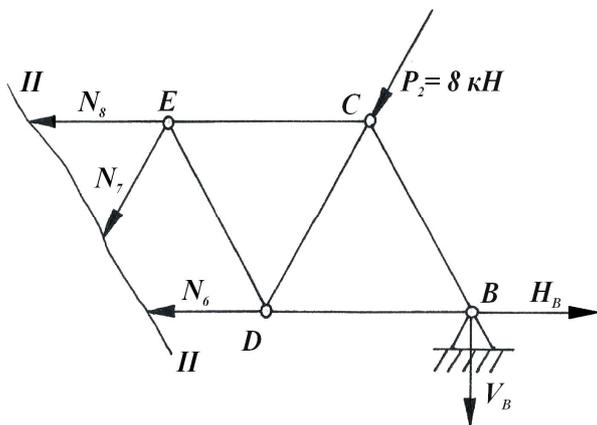
$$\sum X = 0;$$

$$- N_4 - N_3 \cos 60^\circ - P_2 \cos 60^\circ$$

$$- N_2 + H_B = 0;$$

$$- N_4 + 0,5 \cdot 9,75 - 8 \cdot 0,5 - 13,75 + 14,62 = 0;$$

$$N_4 = 1,75 \text{ кН}.$$



2. Проведём сечение II–II через стержни № 6, 7, 8 и рассмотрим правую часть фермы.

$$\sum M_E = 0;$$

$$N_6 H + P_2 \sin 60^\circ a + V_B H = 0;$$

$$2,61 N_6 + 8 \cdot 0,87 \cdot 3 + 1,52 \cdot 4,5 - 14,62 \cdot 2,61 = 0;$$

$$2,61 N_6 = 10,44;$$

$$N_6 = 4 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0;$$

$$- P_2 \sin 60^\circ - V_B - N_7 \sin 60^\circ = 0;$$

$$- 8 \cdot 0,87 - 1,52 - N_7 \cdot 0,87 = 0;$$

$$N_7 = -9,75 \text{ кН.}$$

$$\sum X = 0;$$

$$- N_6 - N_7 \cos 60^\circ - P_2 \cos 60^\circ + H_B - N_8 = 0;$$

$$-4 + 0,5 \cdot 9,75 - 8 \cdot 0,5 + 14,62 - N_8 = 0;$$

$$N_8 = 11,5 \text{ кН.}$$

V. Составляем таблицу расчетных усилий.

Усилие	N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	N <sub>4</sub>	N <sub>5</sub>	N <sub>6</sub>	N <sub>7</sub>	N <sub>8</sub>	N <sub>9</sub>	N <sub>10</sub>	N <sub>11</sub>
Значение	1,75	13,75	9,75	1,75	9,75	4	9,75	11,5	9,75	5,75	11,49
Знак	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+

## **РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5**

### **РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ**

Вариант задания выдается в виде числа, по которому выбираются номера задач для решения и строка исходных данных из таблицы 12.

Для заданных балок (табл. 11) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 12 требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры внутренних силовых факторов.
3. Подобрать поперечные сечения из условий прочности – круглые и прямоугольные деревянные, стальное из двутавра.
4. Изобразить эскиз упругой линии балки, согласуя его с эпюрой моментов  $M$ .

Исходные данные к РГР № 5

Вариант	$a,$ $м$	$b,$ $м$	$c,$ $м$	$F_1,$ $кН$	$F_2,$ $кН$	$q_1,$ $кН/м$	$q_2,$ $кН/м$	$m,$ $кНм$
1	3	2	1	25	15	6	2	40
2	2	1,5	2	30	25	4	3	45
3	3,5	1	3	20	35	5	4	50
4	2,5	2,5	2,5	35	30	3	5	55
5	2	2	1,5	15	20	2	6	60
6	2,5	1,5	3,5	10	15	4	2	35
7	3,5	2,5	3	15	25	5	3	30
8	2,5	2	2,5	20	35	6	4	45
9	2	1,5	2	30	20	3	5	55
10	3	1	1,5	15	10	2	6	35
11	3,5	2	1	25	30	6	3	40
12	3	2	1	25	15	6	2	40
13	2	1	2	30	25	4	3	45
14	3,5	2,5	3	20	35	5	4	50
15	2,5	2	2	35	30	3	2	55
16	2	1,5	3	15	15	2	3	40
17	2,5	2,5	2,5	10	25	4	4	45
18	3,5	2	1,5	15	35	5	5	50
19	2,5	1,5	3,5	20	30	6	6	55
20	2	1	3	30	20	3	2	60
21	3	2	2,5	15	15	2	3	35
22	3,5	1,5	1	25	25	6	4	30
23	2,5	1	1,5	25	35	4	3	45
24	2,5	2,5	1,5	35	20	5	2	55
25	2	1	3	10	35	4	3	35
26	3	2	2,5	15	30	6	2	40
27	2,5	1,5	2	20	25	2	4	45
28	3,5	1,5	1,5	25	20	3	5	50
29	3	2	1	30	15	5	6	55
30	2,5	2,5	1,5	25	10	6	2	60

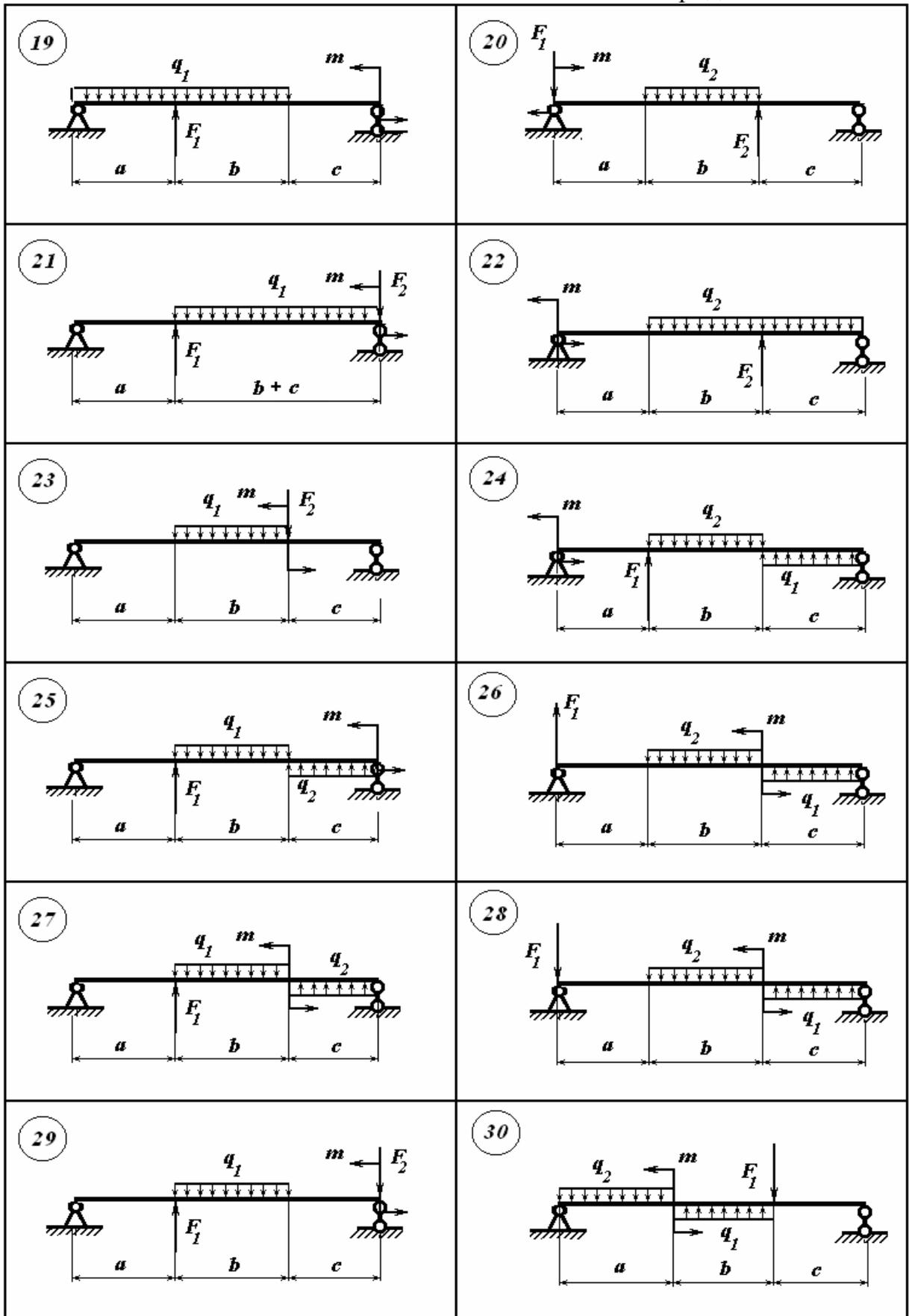
# ЧАСТЬ 1. ДВУХОПОРНАЯ БАЛКА

Таблица 12

Задания к расчетно-графической работе № 5

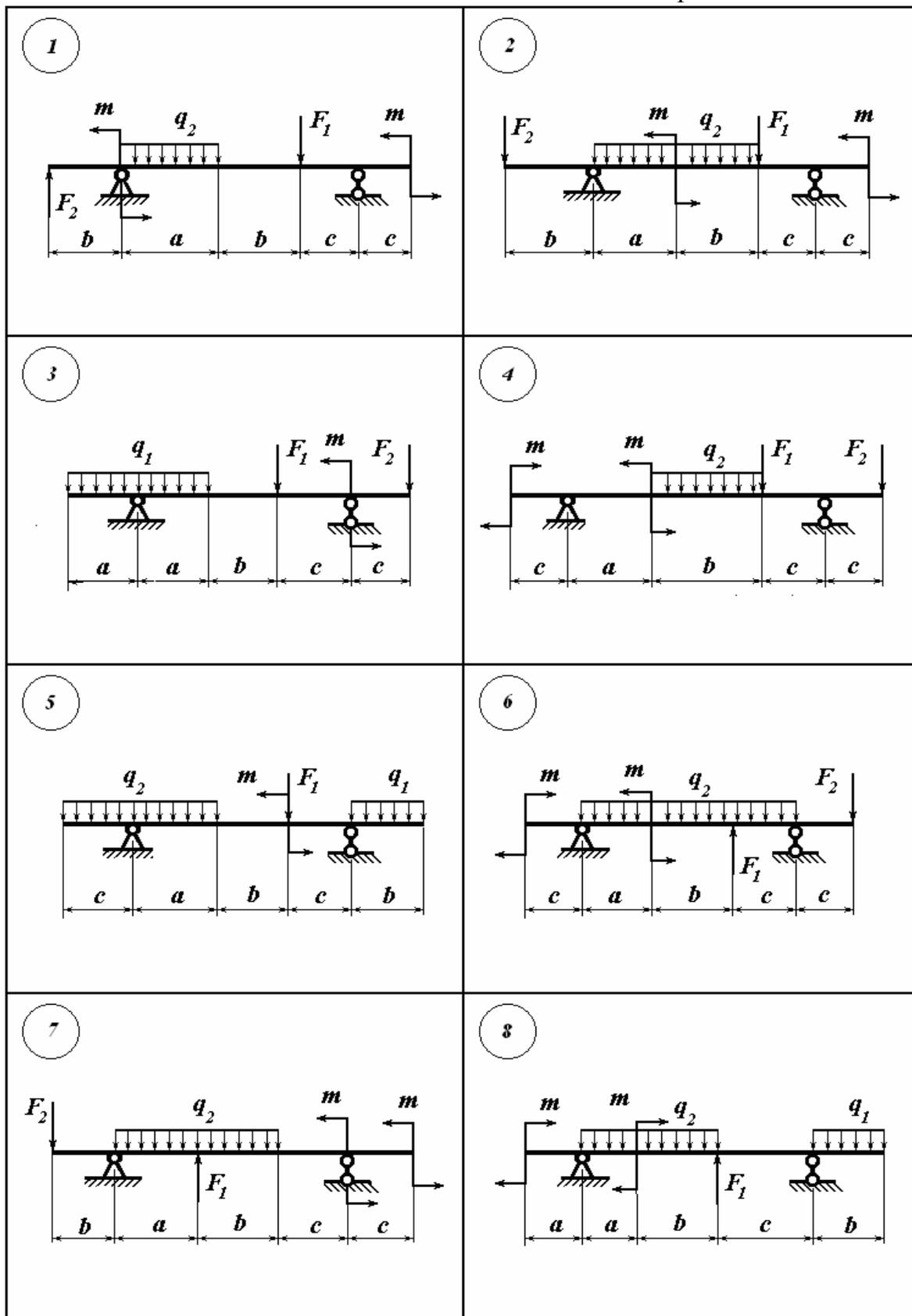
<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>

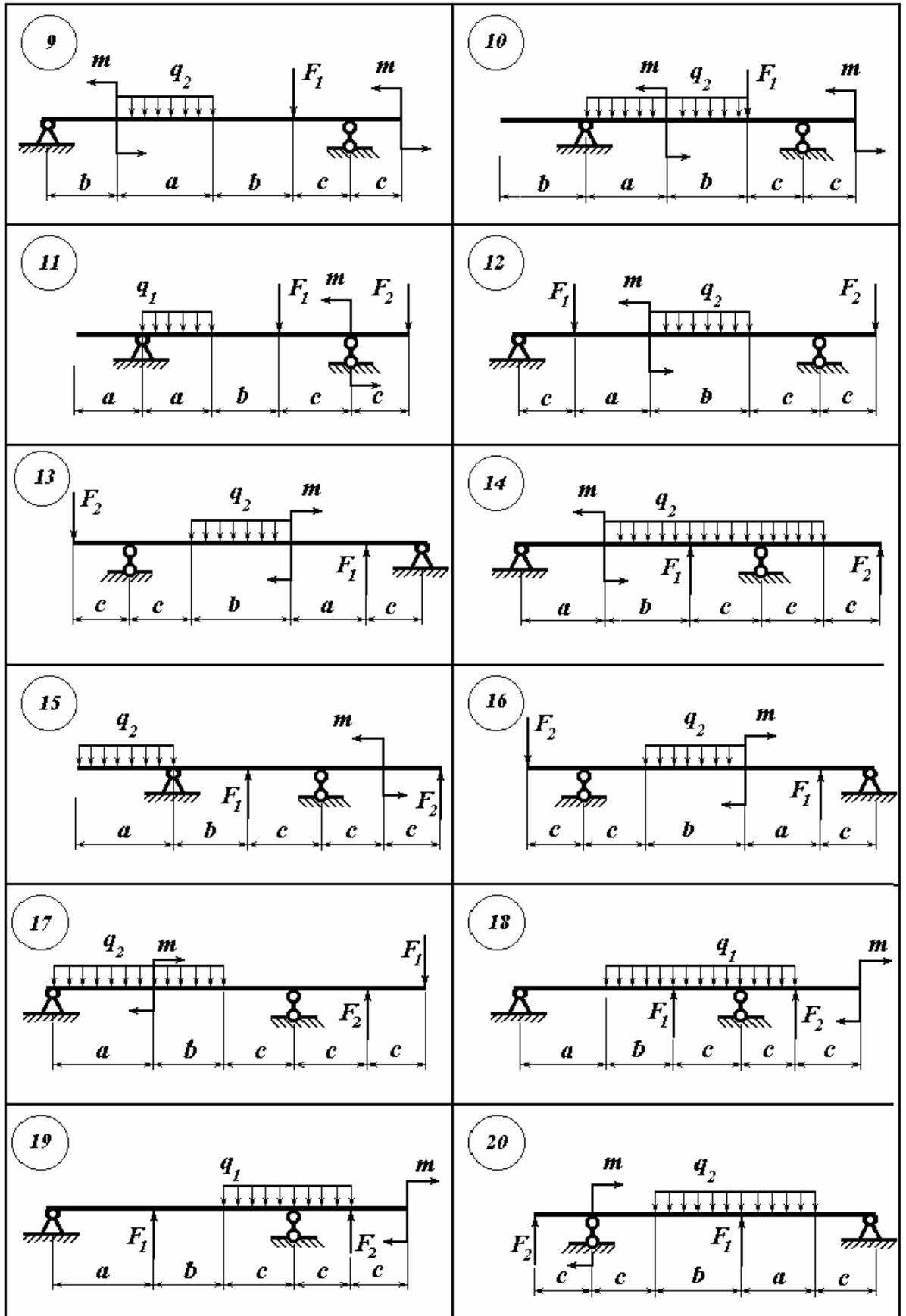
<p>9</p>	<p>10</p>
<p>11</p>	<p>12</p>
<p>13</p>	<p>14</p>
<p>15</p>	<p>16</p>
<p>17</p>	<p>18</p>

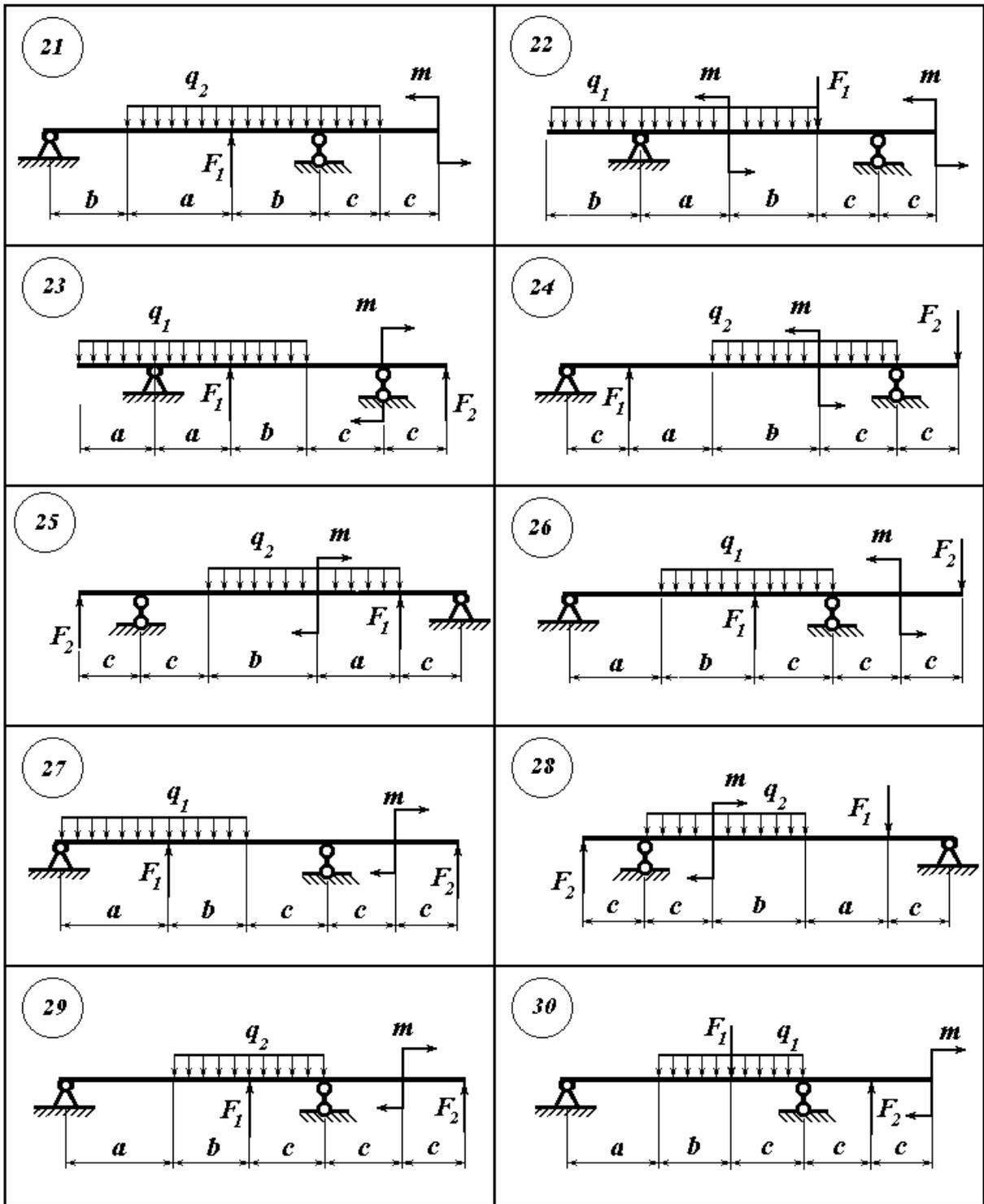


## ЧАСТЬ 2. ДВУХОПОРНАЯ БАЛКА С КОНСОЛЯМИ

Продолжение табл. 12

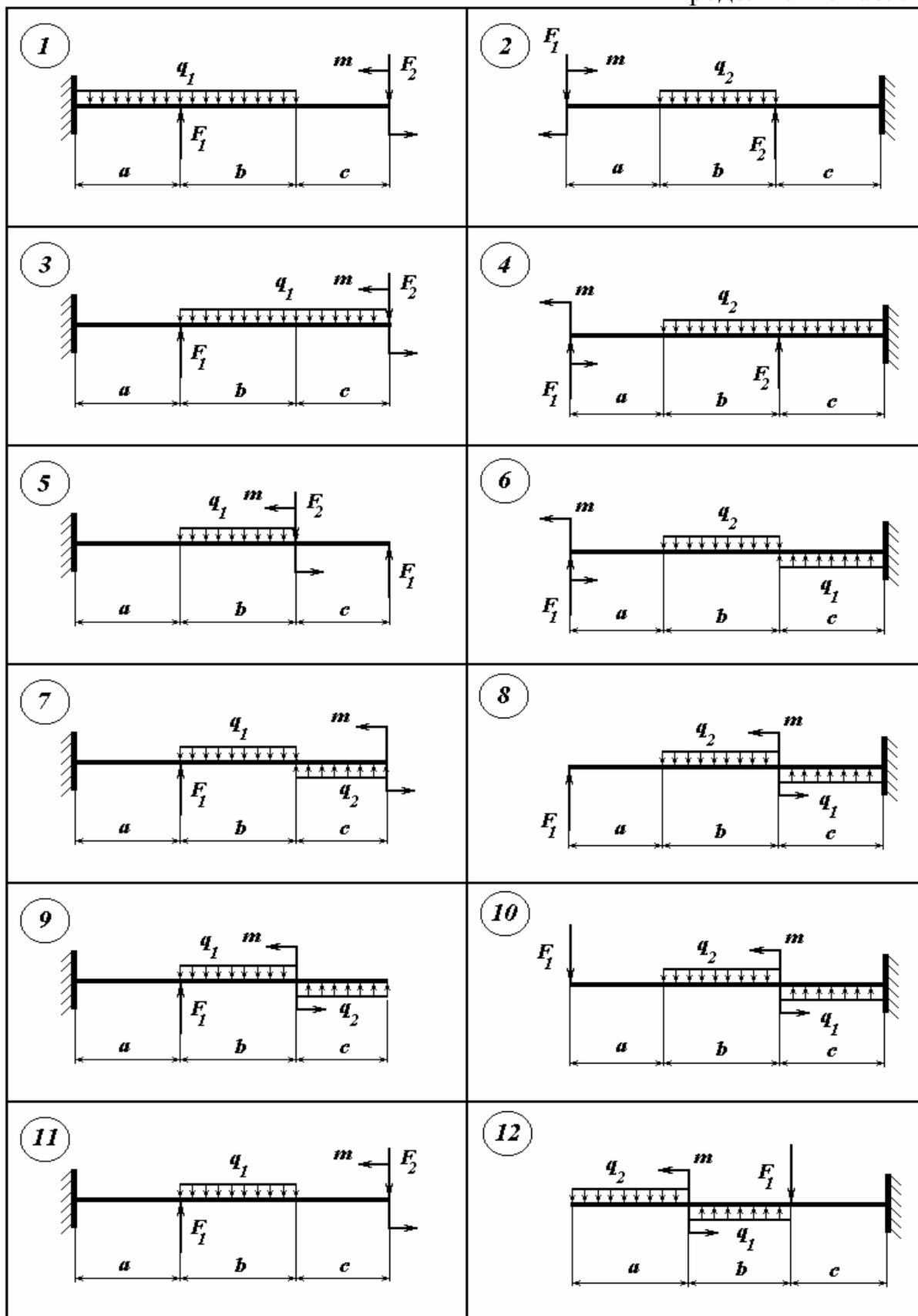




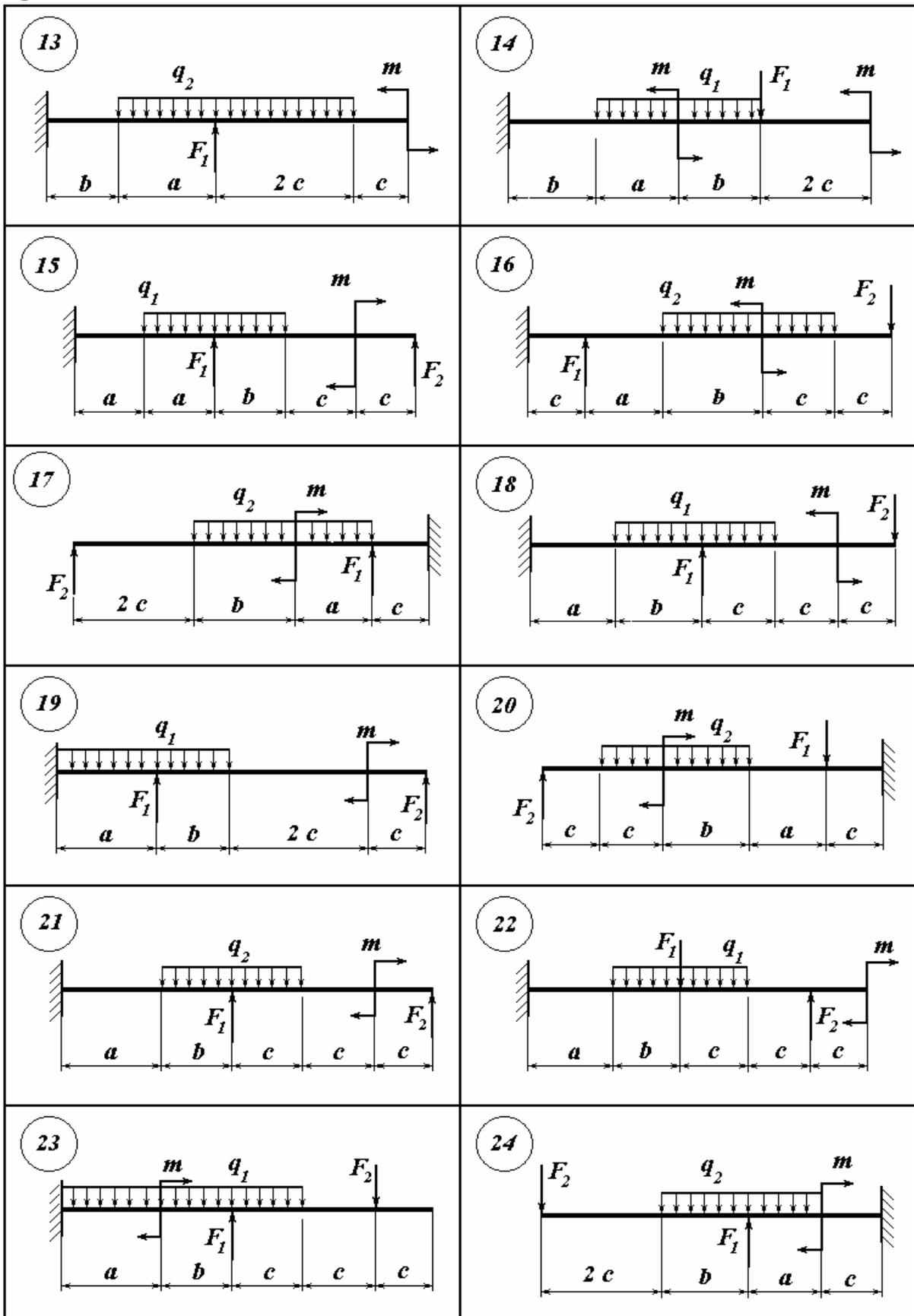


### ЧАСТЬ 3. КОНСОЛЬНАЯ БАЛКА

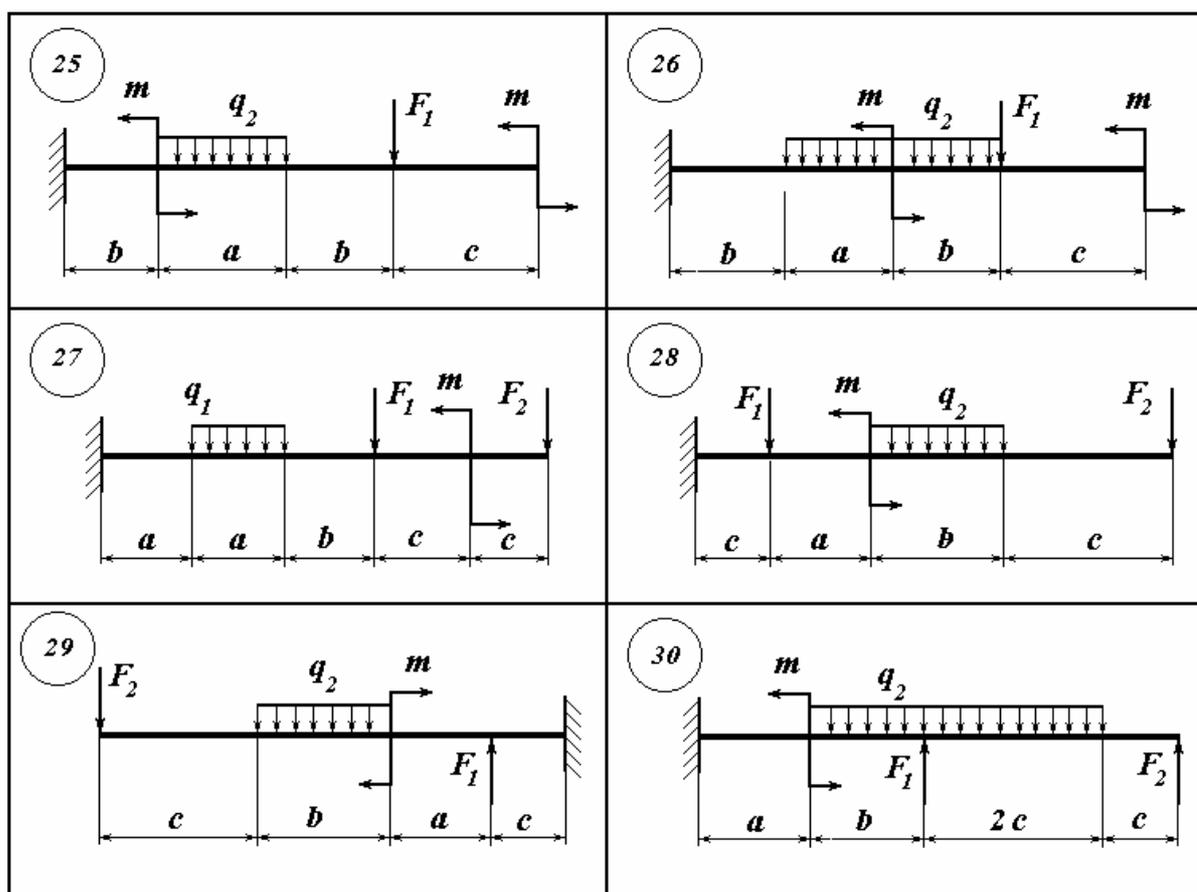
Продолжение табл. 12



Продолжение табл. 12



Окончание табл. 12



## КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР $Q$ И $M$

1. Если на балку действует сосредоточенная сила, то на эпюре поперечных сил  $Q$  под силой – скачок на величину этой силы и в ее направлении (если идти от левого конца балки, а если с правого конца – то скачок в сторону, противоположенную действию силы). При этом на эпюре моментов  $M$  – стыковка двух линий с образованием уступа (излома) в сторону обратную действию силы.

2. Если на балку действует равномерно распределенная нагрузка, то эпюра  $Q$  на этом участке ограничена наклонной прямой, а на эпюре  $M$  – кривой II порядка (параболой, выпуклостью в сторону обратную действию нагрузки).

3. Если в каком-либо сечении балки приложен сосредоточенный момент, то на эпюре  $Q$  его действие не отразится, а на эпюре  $M$  будет скачок, равный по величине приложенному моменту.

4. При следовании от расчетной схемы к эпюре  $M$  через эпюру  $Q$  – порядок линий увеличивается на единицу.

5. Каждая ордината поперечных сил  $Q = \frac{dM}{dz}$  представляет собой тангенс угла наклона касательной к эпюре  $M$  с горизонтальной осью. Также  $q = \frac{dQ}{dz}$ , тогда  $q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}$ .

6. Если  $Q = 0$ , т.е.  $tg\alpha = 0$ , то  $M = const$ , на эпюре  $M$  – прямая, параллельная нулевой линии.

7. Если  $Q$  переходит через ноль, меняя знаки, то на этом участке  $M = M_{max}$  – экстремум.

8. Положительным значениям на эпюре  $Q$  соответствует возрастание линии графика эпюры  $M$ , отрицательным же значениям  $Q$  – убывание.

## ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 5

### ПРИМЕР 1

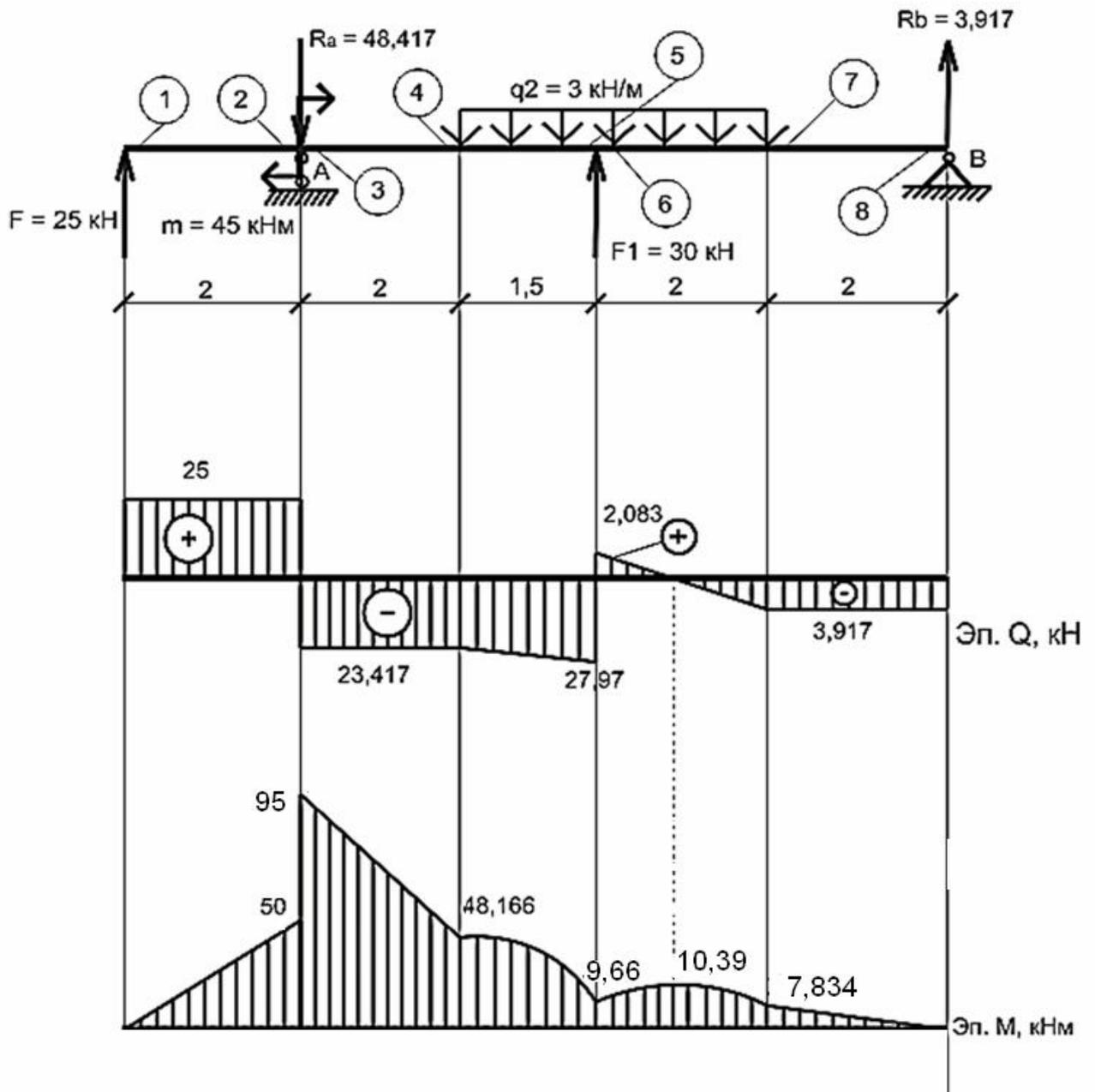


Рисунок 7. Пример 1 – балка на двух опорах

1) Находим реакции опор. Для этого составляем уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \\ 25 \cdot 2 + 45 + 3 \cdot 3,5 \cdot 3,75 - 30 \cdot 3,5 - 7,5 R_B &= 0; \\ 7,5 R_B &= 29,375; \\ R_B &= 3,917 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0; \\ 30 \cdot 4 - 3 \cdot 3,5 \cdot 3,75 + 45 - 7,5 R_A + 25 \cdot 9,5 &= 0; \end{aligned}$$

$$7,5R_A = 363,125;$$
$$R_A = 48,417 \text{ кН.}$$

Проверка:  $\sum y = 0;$   
 $25 - 48,417 - 3 \cdot 3,5 + 30 + 3,917 = 0;$   
 $0 = 0.$

2) Построим эпюры внутренних силовых факторов Q и M по характерным точкам. *Характерными* точками называются точки приложения сосредоточенных сил, границы приложения равномерно распределенных нагрузок, точки приложения моментов, шарниры, узлы, заделки.

Построение эпюры Q.

1. Проведём сечение I-I в точке 1 и рассмотрим участок слева от сечения. В него вошла сила  $F = 25 \text{ кН}$ , действующая вверх, поэтому на эпюре Q откладываем значение  $25 \text{ кН}$  вверх от нулевой линии.

2. Проводим сечение в точке 2 расположенной левее шарнира A на бесконечно малом расстоянии, и рассматриваем левую часть балки. В него также вошла только сила  $F = 25 \text{ кН}$ , поэтому в точке 2 также откладываем  $25 \text{ кН}$  вверх от нулевой линии.

3. Проводим сечение в точке 3, рассмотрим левую часть. В него вошла сила  $F = 25 \text{ кН}$ , действующая вверх и сила  $R_A = 48,417 \text{ кН}$ , действующая вниз. Поэтому на эпюре в точке 3 откладываем  $25 - 48,417 = -23,417 \text{ кН}$ . В точке A образуется скачок на величину реакции  $R_A$ .

4. В точке 4 ничего не добавилось, на эпюре откладываем значение  $23,417 \text{ кН}$ .

5. Проводим сечение в точке 5. Аналогично предыдущим расчетам получаем:  $25 - 48,417 - 3 \cdot 1,5 = -27,917 \text{ кН}$ .

6. Далее для удобства начнем расчет с правой стороны. Проведем сечение в точке 8, рассмотрим правую часть. В неё вошла только сила  $R_B = 3,917 \text{ кН}$ , действующая вверх. Так как расчет ведем с правой стороны, на эпюре откладываем ее значение вниз.

7. В точке 7 ничего не изменилось, на эпюре в точке 7 откладываем  $3,917 \text{ кН}$  вниз.

8. Проведем сечение в точке 6, рассмотрим правую часть. Добавляется нагрузка  $q_2 = 3 \text{ кН/м}$ , действующая вниз. На эпюре откладываем:  $-3,917 + 3 \cdot 2 = 2,083 \text{ кН}$ .

В точке приложения силы получаем скачок, равный ее величине  $30 \text{ кН}$ .

Полученные точки необходимо последовательно соединить прямыми отрезками, расставить знаки («+» – для участков, расположенных выше нулевой линии, «-» – ниже нулевой линии. Все участки заштриховываются аккуратно вертикальной штриховкой.

Построение эпюры M.

Эпюра моментов M строится на сжатом волокне.

Будем считать момент  $M$  положительным, если приложенные силы сжимают верхние волокна балки, отрицательным – если нижние. Эпюра моментов  $M$  строится по тем же характерным точкам, что и эпюра поперечных сил  $Q$ .

1. Проводим аналогично сечения в точках, где хотим найти момент. В точке 1, в месте приложения силы  $F$  – рассматриваем левую часть, в нее вошла только сила  $F = 25$  кН, т.к. эта сила не имеет плеча относительно точки 1, момент равен 0.

2. Проведем сечение на бесконечно малом расстоянии слева от точки А, в точке 2 и рассмотрим левую часть. В нее вошла сила  $F = 25$  кН с плечом 2 м относительно точки 2, следовательно в точке 2 момент равен  $25 \cdot 2 = 50$  кНм. Сила сжимает верхние волокна, поэтому значение откладывается вверх от нулевой линии.

3. Проведем сечение на бесконечно малом расстоянии правее точки А, в точке 3. Рассмотрим левую часть. В нее вошла сила  $F = 25$  кН с плечом 2 м относительно точки 3, момент  $m = 45$  кНм и сила  $R_A = 48,417$  кН с плечом 0 м относительно точки 3. Момент также как и сила  $F$  сжимает верхние волокна, следовательно, учитывается в расчете также со знаком «+»:  $25 \cdot 2 + 50 = 95$  кНм. В точке А произошел скачок на величину приложенного момента.

4. Аналогично находим значения моментов в остальных точках.

В точке 4:  $25 \cdot 4 + 45 - 48,417 \cdot 2 = 48,166$  кНм.

В точке 5:  $25 \cdot 5,5 + 45 - 48,417 \cdot 3,5 - 3 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 9,668$  кНм.

5. Для удобства расчетов продолжим расчет с правой стороны балки. В точке 8 момент равен 0.

6. В точке 7:  $3,917 \cdot 2 = 7,834$  кНм (сжимает верхние волокна, откладываем вверх).

7. Возвращаемся в точку приложения силы  $F_1$ :  
 $3,917 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9,668$  кНм. В этой точке наблюдается излом в сторону действия силы.

Значения в точках при построении эпюр с левой и с правой стороны должны совпасть.

Найденные точки соединяют прямыми, а границы участков с равномерно распределенной нагрузкой – параболой, выпуклостью в сторону обратную действию нагрузки.

Необходимо отметить, что на эпюре  $M$  по сравнению с эпюрой  $Q$  порядок линий увеличивается на единицу, т.е. если на эпюре  $Q$  горизонтальная прямая, то на эпюре  $M$  – наклонная, если на эпюре  $Q$  наклонная, то на эпюре  $M$  – парабола и т.д.

Определение экстремума.

Экстремум располагается на эпюре моментов под точкой пересечения эпюры  $Q$  с нулевой линией.

Экстремум определим по формуле:  $M_{max} = M_0 \pm \frac{Q_0^2}{2q}$ , где

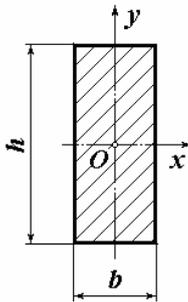
$M_0$  – значение момента на любой из границ соответствующего участка.

$Q_0$  – значение  $Q$  на соответствующей границе участка.

Тогда  $M_{max} = 9,668 + \frac{2,008^2}{6} = 10,39$  кНм.

3) Подбираем поперечные сечения данной балки.

Подберем деревянное ( $[\sigma] = 10$  МПа) прямоугольное сечение с соотношением сторон  $h = 2b$ .



Условие прочности при изгибе по максимальным нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 10 \text{ МПа},$$

где  $[\sigma] = 10$  МПа – расчетное сопротивление дерева;

$W_x$  – момент сопротивления балки.

Для прямоугольного сечения:  $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{b \cdot 4b^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$ .

$$W_x = \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = \frac{95 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{10 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 9500 \text{ см}^3.$$

$$b = \sqrt[3]{1,5W} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 9500} = 24,24 \text{ см.}$$

Примем  $b = 24,5$  см, тогда  $h = 2b = 49$  см.

## ПРИМЕР 2

Для балки с жёсткой заделкой нет необходимости находить опорные реакции, тогда построение эпюр всегда необходимо начинать со свободного конца балки.

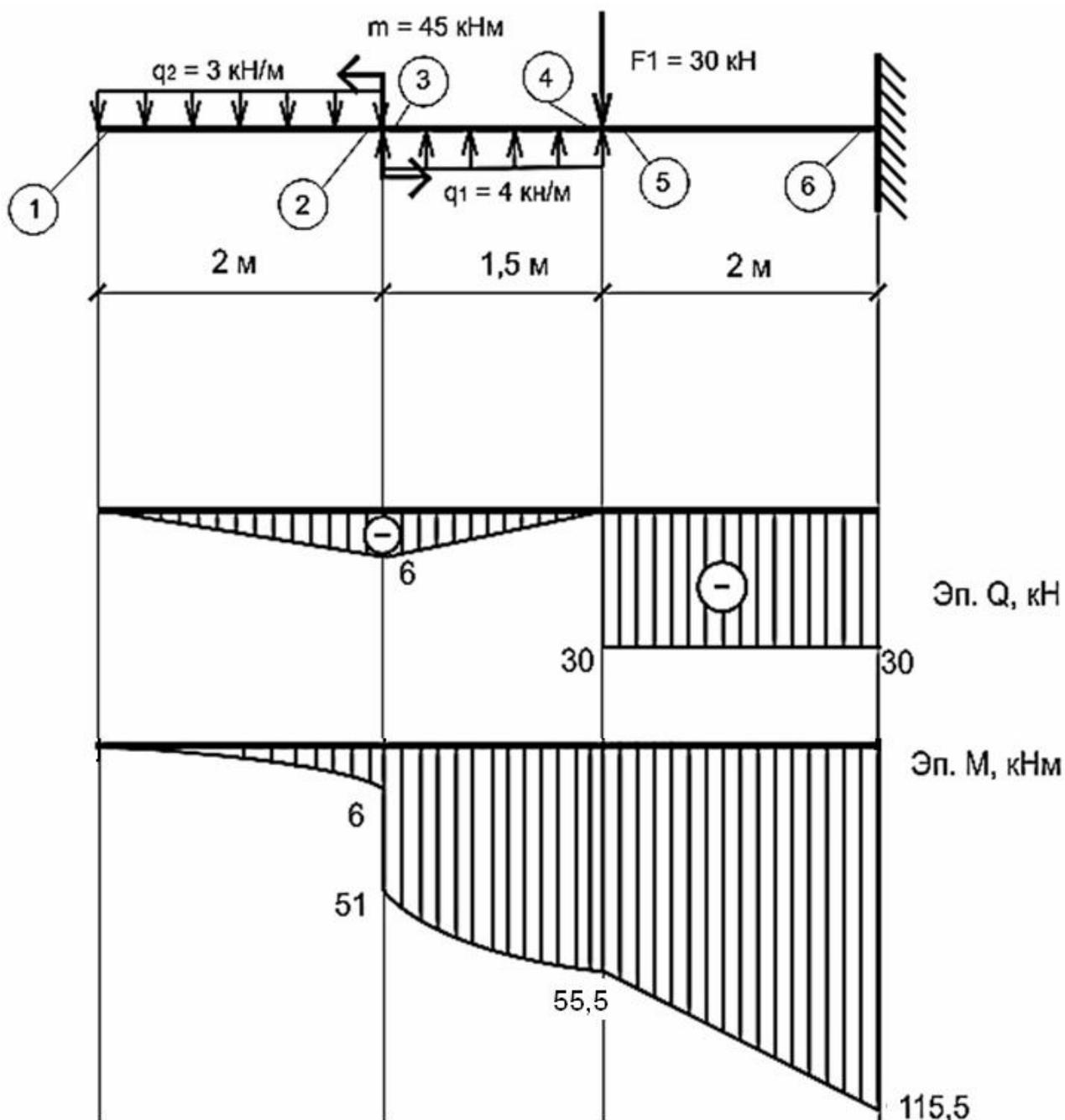


Рисунок 8 - Пример 2 – балка с жесткой заделкой

### 1. Построение эпюры Q.

Расчет ведем с левого конца балки, проводим сечение в точке 1. В отсеченную часть не попало никаких сил, следовательно, в начале этого участка  $Q = 0$ .

Проводим сечение в точке 2. В отсеченную часть входит нагрузка  $q_2$ , действующая вниз, поэтому на эпюре откладываем:  $-3 \cdot 2 = -6$  кН – вниз от нулевой линии.

В точке 3 – аналогично.

Проводим сечение в точке 4. В отсечённую часть входят две нагрузки:  $q_2$ , действующая вниз, и  $q_1$ , действующая вверх. На эпюре откладываем:

$$-3 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5 = 0.$$

Проводим сечение в точке 5, рассматриваем левую часть. Помимо нагрузок в неё входит сила  $F_1 = 30$  кН, действующая вниз. На эпюре откладываем:

$$-3 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5 - 30 = -30 \text{ кН.}$$

В точке 6 – аналогично.

Соединяем полученные точки отрезками прямых.

## 2. Построение эпюры М.

Начинаем построение также со свободного конца балки. В участок слева от точки 1 не входят моменты, поэтому здесь  $M = 0$ .

Проводим сечение в точке 2 и рассматриваем левую часть. В неё входит нагрузка  $q_2$ , сжимающая нижние волокна. Момент в этой точке равен:

$$-3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ кНм.}$$

Проводим сечение в точке 3, рассматриваем левую часть. Помимо нагрузки в неё входит момент  $m = 45$  кН, сжимающий также нижние волокна. На эпюре откладываем:  $-3 \cdot 2 \cdot 1 - 45 = -51$  кНм.

Далее все построения выполняются аналогично. Момент в точке 4 равен:  $-3 \cdot 2 \cdot 1 - 45 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -55,5$  кНм.

В точке 5 добавилась сила  $F_1$ , но, т.к. её плечо равно нулю, на эпюре значение момента не меняется.

В точке 6 момент равен:

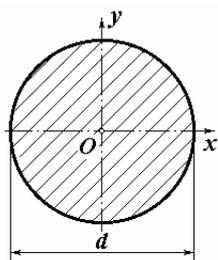
$$-3 \cdot 2 \cdot 1 - 45 + 4 \cdot 1,5 \cdot 2,75 - 30 \cdot 2 = -115,5 \text{ кНм.}$$

Полученные точки соединяем отрезками прямых, а под нагрузкой – параболой, выпуклостью в сторону обратную действию нагрузки.

По построенным эпюрам можно определить опорные реакции в заделке данной балки:  $Q = 30$  кН, направлена вверх,  $M = 115,5$  кНм, сжимает нижние волокна балки (направлен по часовой стрелке).

### 3. Подбор сечений.

Выполним подбор круглого деревянного сечения



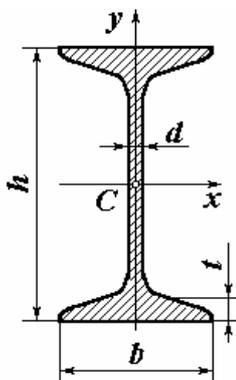
$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 10 \text{ МПа}, \text{ откуда } W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]},$$

где  $[\sigma] = 10$  МПа – расчетное сопротивление дерева;  $W_x$  – момент сопротивления круглого сечения балки:  $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$ .

Тогда требуемый диаметр круглого поперечного сечения балки равен

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\max}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 115,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0,49 \text{ м. Принимаем } d = 50 \text{ см.}$$

Выполним подбор стального двутаврового сечения



$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

$$W_x = \frac{115,5 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 0,722 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 722 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) подбираем двутавр № 36 с  $W_x = 743 \text{ см}^3$ .

## **РГР № 6. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ**

Вариант задания выдается в виде числа, по которому выбираются номера задач для решения и строка исходных данных из таблицы 13. Работы, выполненные не по шифру, преподавателем не рецензируются.

При выполнении расчетно-графической работы в пояснительной записке должны быть отражены следующие этапы расчета:

**Часть 1.** Для заданного статически определимого ступенчатого стержня:

1.1. Построить эпюру продольных сил.

1.2. Из условия прочности подобрать площади поперечных сечений стержней, учитывая заданное соотношение площадей.

1.3. Построить эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня.

1.4. Построить эпюру перемещений.

**Часть 2.** Стержни АВ и СВ соединены шарниром В, на ось которого действуют две нагрузки  $P_1$  и  $P_2$ , как показано в таблице 5. Крепления стержней в точках А и С шарнирные. Определить усилия в стержнях и подобрать поперечное сечение в стержнях в виде двух равнобоких уголков по ГОСТ 8509-72 из условия прочности при растяжении-сжатии. Схемы нагружений стержней в задачах и числовые значения сил  $P_1$  и  $P_2$  для своего варианта взять из таблицы 13.

Таблица 13. Исходные данные к РГР № 6

Вариант	№ схем	<i>a</i> , м	<i>b</i> , м	<i>c</i> , м	F, P <sub>1</sub> кН	P <sub>2</sub> кН	Материал стержней
1	2	3	2	1	300	840	Алюминий
2	3	2	1,5	2	560	340	Бронза
3	4	3,5	1	3	538	390	Латунь
4	6	2,5	2,5	2,5	560	380	Медь
5	5	2	2	1,5	450	520	Сталь углеродистая
6	8	2,5	1,5	3,5	550	670	Сталь легированная
7	7	3,5	2,5	3	550	600	Алюминий
8	10	2,5	2	2,5	668	348	Бронза
9	9	2	1,5	2	620	300	Латунь
10	2	3	1	1,5	420	900	Медь
11	1	3,5	2	1	200	400	Сталь углеродистая
12	3	3	2	1	240	720	Сталь легированная
13	4	2	1	2	480	288	Алюминий
14	6	3,5	2,5	3	360	660	Бронза
15	5	2,5	2	2	720	774	Латунь
16	8	2	1,5	3	600	620	Медь
17	7	2,5	2,5	2,5	583	305	Сталь углеродистая
18	10	3,5	2	1,5	520	420	Сталь легированная
19	9	2,5	1,5	3,5	508	308	Алюминий
20	2	2	1	3	480	600	Бронза
21	1	3	2	2,5	620	600	Латунь
22	4	3,5	1,5	1	700	215	Медь
23	3	2,5	1	1,5	400	420	Сталь углеродистая
24	6	2,5	2,5	1,5	620	940	Сталь легированная
25	5	2	1	3	800	688	Алюминий
26	8	3	2	2,5	600	660	Бронза
27	7	2,5	1,5	2	990	590	Латунь
28	10	3,5	1,5	1,5	610	310	Медь
29	9	3	2	1	628	348	Сталь углеродистая
30	2	2,5	2,5	1,5	500	980	Сталь легированная

Таблица 14. Часть 1 для РГР № 6

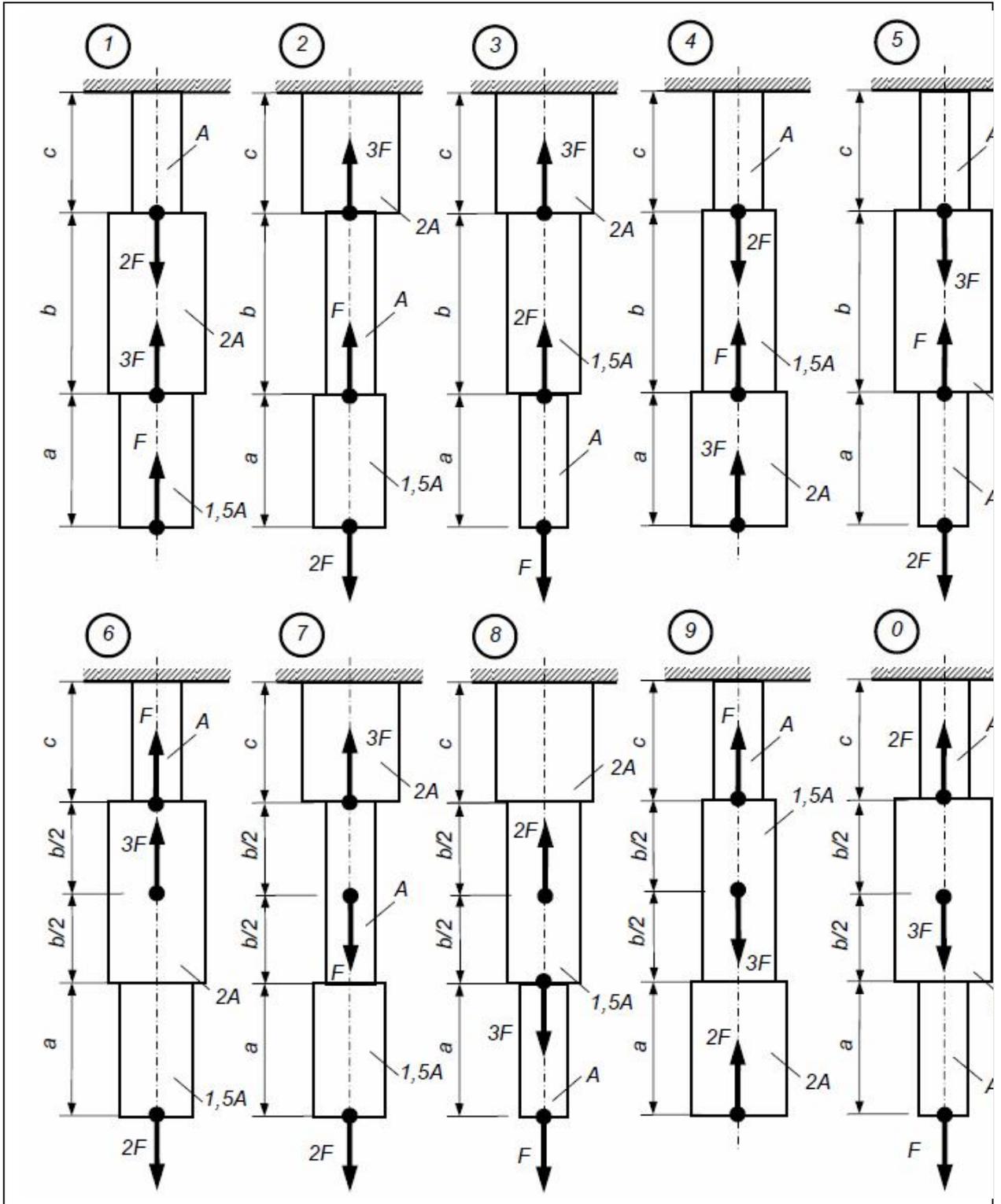


Таблица 15. Часть 2 для РГР № 6

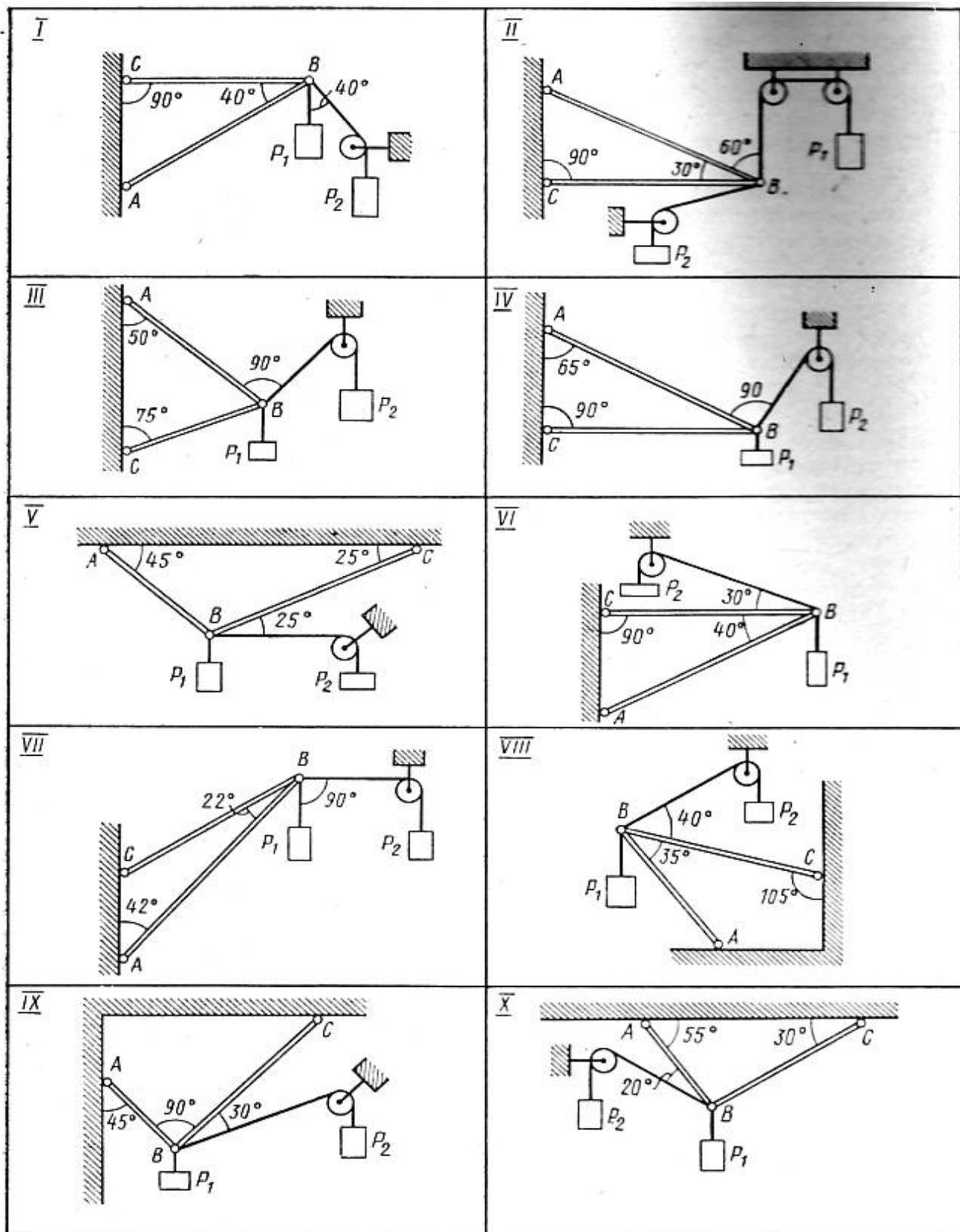


Таблица 16. Ориентировочные величины основных допустимых напряжений на растяжение и сжатие  $[\sigma]$ , МПа \*

<b>Материал</b>	<b>Напряжение (МПа)</b>
Сталь Ст.2	140
Сталь Ст.3	160
Сталь Ст.3 в мостах	140
Сталь машиностроительная (конструкционная) углеродистая	80...250
Сталь машиностроительная (конструкционная) легированная	100...400 и выше
Медь	30...120
Латунь	70...140
Бронза	60...120
Алюминий	30...80
Алюминиевая бронза	80...120
Дюралюминий	80...150
Текстолит	30...40
Гетинакс	50...70
Бакелитизированная фанера	40...50

\* Для разнообразных видов одного материала – принимать любой из них. При определении справочных величин для материалов, у которых даны их значения в определенных интервалах – принимать среднее значение.

Таблица 17. Модули упругости и коэффициенты Пуассона

Материал	Модуль упругости, Е, МПа	Коэфф. линейн. расширения, $\alpha$	Коэффициент Пуассона, $\mu$
Чугун серый, белый	$(1,15...1,60) \cdot 10^5$	$110 \cdot 10^{-7}$	0,23...0,27
Ковкий чугун	$1,55 \cdot 10^5$	$110 \cdot 10^{-7}$	–
Углеродистые стали	$(2,0...2,1) \cdot 10^5$	$(100...130) \cdot 10^{-7}$	0,24...0,28
Легированные стали	$(2,1...2,2) \cdot 10^5$	$(100...130) \cdot 10^{-7}$	0,25...0,30
Медь прокатанная	$1,1 \cdot 10^5$	$167 \cdot 10^{-7}$	0,31...0,34
Медь холодноотянутая	$1,3 \cdot 10^5$	$167 \cdot 10^{-7}$	–
Медь литая	$0,84 \cdot 10^5$	$167 \cdot 10^{-7}$	–
Фосфористая бронза катаная	$1,15 \cdot 10^5$	$(170...220) \cdot 10^{-7}$	0,32...0,35
Латунь холодноотянутая	$(0,91...0,99) \cdot 10^5$	$(170...220) \cdot 10^{-7}$	0,32...0,42
Корабельная латунь катаная	$1,0 \cdot 10^5$	$(170...220) \cdot 10^{-7}$	0,36
Марганцовистая бронза катаная	$1,1 \cdot 10^5$	$(170...220) \cdot 10^{-7}$	0,35
Алюминий катаный	$0,69 \cdot 10^5$	$255 \cdot 10^{-7}$	0,32...0,36
Алюминиевая проволока тянутая	$0,7 \cdot 10^5$	$255 \cdot 10^{-7}$	–
Алюминиевая бронза литая	$1,05 \cdot 10^5$	–	–
Дюралюминий катаный	$0,71 \cdot 10^5$	–	–
Цинк катаный	$0,84 \cdot 10^5$	–	0,27
Свинец	$0,17 \cdot 10^5$	–	0,42
Лёд	$0,1 \cdot 10^5$	$507 \cdot 10^{-7}$	–

Таблица 18. Таблица синусов и косинусов углов.

угол $\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	угол $\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	угол $\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
<b>1</b>	0,017	1	<b>31</b>	0,515	0,857	<b>61</b>	0,875	0,485
<b>2</b>	0,035	0,999	<b>32</b>	0,530	0,848	<b>62</b>	0,883	0,469
<b>3</b>	0,052	0,999	<b>33</b>	0,545	0,839	<b>63</b>	0,891	0,454
<b>4</b>	0,070	0,998	<b>34</b>	0,559	0,829	<b>64</b>	0,899	0,438
<b>5</b>	0,087	0,996	<b>35</b>	0,574	0,819	<b>65</b>	0,906	0,423
<b>6</b>	0,105	0,995	<b>36</b>	0,588	0,809	<b>66</b>	0,914	0,407
<b>7</b>	0,122	0,993	<b>37</b>	0,602	0,799	<b>67</b>	0,921	0,391
<b>8</b>	0,139	0,990	<b>38</b>	0,616	0,788	<b>68</b>	0,927	0,375
<b>9</b>	0,156	0,988	<b>39</b>	0,629	0,777	<b>69</b>	0,934	0,358
<b>10</b>	0,174	0,985	<b>40</b>	0,643	0,766	<b>70</b>	0,940	0,342
<b>11</b>	0,191	0,982	<b>41</b>	0,656	0,755	<b>71</b>	0,946	0,326
<b>12</b>	0,208	0,978	<b>42</b>	0,669	0,743	<b>72</b>	0,951	0,309
<b>13</b>	0,225	0,974	<b>43</b>	0,682	0,731	<b>73</b>	0,956	0,292
<b>14</b>	0,242	0,970	<b>44</b>	0,695	0,719	<b>74</b>	0,961	0,276
<b>15</b>	0,259	0,966	<b>45</b>	0,707	0,707	<b>75</b>	0,966	0,259
<b>16</b>	0,276	0,961	<b>46</b>	0,719	0,695	<b>76</b>	0,970	0,242
<b>17</b>	0,292	0,956	<b>47</b>	0,731	0,682	<b>77</b>	0,974	0,225
<b>18</b>	0,309	0,951	<b>48</b>	0,743	0,669	<b>78</b>	0,978	0,208
<b>19</b>	0,326	0,946	<b>49</b>	0,755	0,656	<b>79</b>	0,982	0,191
<b>20</b>	0,342	0,940	<b>50</b>	0,766	0,643	<b>80</b>	0,985	0,174
<b>21</b>	0,358	0,934	<b>51</b>	0,777	0,629	<b>81</b>	0,988	0,156
<b>22</b>	0,375	0,927	<b>52</b>	0,788	0,616	<b>82</b>	0,990	0,139
<b>23</b>	0,391	0,921	<b>53</b>	0,799	0,602	<b>83</b>	0,993	0,122
<b>24</b>	0,407	0,914	<b>54</b>	0,809	0,588	<b>84</b>	0,995	0,105
<b>25</b>	0,423	0,906	<b>55</b>	0,819	0,574	<b>85</b>	0,996	0,087
<b>26</b>	0,438	0,899	<b>56</b>	0,829	0,559	<b>86</b>	0,998	0,070
<b>27</b>	0,454	0,891	<b>57</b>	0,839	0,545	<b>87</b>	0,999	0,052
<b>28</b>	0,469	0,883	<b>58</b>	0,848	0,530	<b>88</b>	0,999	0,035
<b>29</b>	0,485	0,875	<b>59</b>	0,857	0,515	<b>89</b>	1	0,017
<b>30</b>	0,5	0,866	<b>60</b>	0,866	0,5	<b>90</b>	1	0

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 6

Часть 1. Расчет на прочность статически определимого ступенчатого стержня по допускаемым напряжениям

Исходные данные для расчета:

Стержень медный,  $E_{Cu} = 1,1 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma]_{Cu} = 75$  МПа

**Решение:**

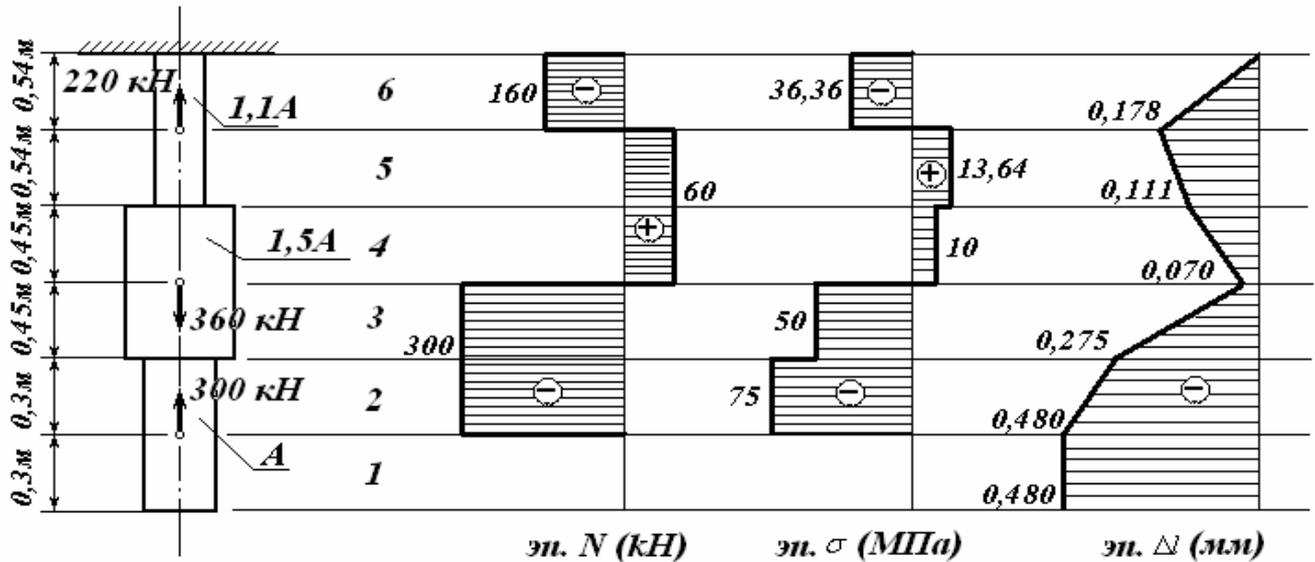


Рисунок 9. Статически определимый ступенчатый стержень

а) Рассматриваемый стержень состоит из 6 участков, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и места изменения размеров поперечного сечения. Проводя произвольные сечения в пределах каждого участка стержня и рассматривая его нижнюю часть (отбрасывая часть с заделкой), находим продольные силы на каждом участке стержня, одновременно строя эпюру продольных сил  $N$  (рисунок 9). По эпюре  $N$  можно, определить продольную силу в заделке, которая равна -160 кН.

б) Для определения опасного сечения находим нормальные

напряжения на каждом участке стержня:  $\sigma = \frac{N}{A}$ .

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} = 0; \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{-300}{A}; \\ \sigma_3 &= \frac{N_3}{A_3} = \frac{-300}{kA} = \frac{-300}{1,5A} = \frac{-200}{A}; \\ \sigma_4 &= \frac{40}{A}; \\ \sigma_5 &= \frac{54,55}{A}; \\ \sigma_6 &= \frac{-145,45}{A}.\end{aligned}$$

Из условий прочности для опасного (второго) участка при растяжении-сжатии:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{300}{A} \leq [\sigma]_{Cu} = 75 \text{ МПа}, \text{ отсюда}$$

$$A = \frac{300}{75} = \frac{300 \cdot 10^3 \text{ Н}}{75 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2.$$

Далее можно определить площадь поперечного сечения каждого участка стержня.

в) Построение эпюры нормальных напряжений.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях участков равны:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0; \\ \sigma_2 &= \frac{-300}{A} = \frac{-300 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = -75 \cdot 10^6 = -75 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= \frac{-200 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = -50 \text{ МПа}; \\ \sigma_4 &= 10 \text{ МПа}; \\ \sigma_5 &= 13,64 \text{ МПа}; \\ \sigma_6 &= -36,36 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (рис.9).

г) Построение эпюры перемещений поперечных сечений вдоль оси.

Для построения эпюры относительных перемещений используем закон

Гука для абсолютных удлинений: 
$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \sigma \frac{l}{E}.$$

Эпюру перемещений следует строить, начиная от заделки, перемещение сечения в которой равно нулю. Удлинения участков соответственно равны:

$$\Delta l_1 = 0;$$

$$\Delta l_2 = \sigma_2 \frac{l_2}{E} = \frac{-75 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,3 \text{ м}}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па}} = -0,000205 \text{ м} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{-50 \cdot 10^6 \cdot 0,45}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = 0,041 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = 0,067 \text{ мм};$$

$$\Delta l_6 = -0,178 \text{ мм};$$

Ординаты эпюры перемещений границ участков будут:

$$y_6 = \Delta l_6 = -0,178 \text{ мм};$$

$$y_5 = \Delta l_6 + \Delta l_5 = -0,178 + 0,067 = -0,111 \text{ мм};$$

$$y_4 = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 = -0,070 \text{ мм};$$

$$y_3 = \sum_3^6 \Delta l_i = -0,275 \text{ мм};$$

$$y_2 = -0,480 \text{ мм};$$

$$y_1 = -0,480 \text{ мм}.$$

По полученным перемещениям сечений строим эпюру перемещений (рисунок 9).

## РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

### РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Для стального вала при значениях момента  $P$  по табл. 19 (рис. 10), требуется:

1. Построить эпюру крутящего момента  $M_k$ .
2. Определить требуемый диаметр сплошного и полого вала (отношение внутреннего диаметра к наружному  $d/D=0,8$ ) из расчетов на прочность, приняв допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 60$  МПа. Диаметр вала считать по всей длине постоянным.
3. Вычертить по длине вала эпюру касательных напряжений  $\tau$ .
4. Построить эпюры углов закручивания для сплошного варианта сечения вала, считая неподвижным левый конец вала.
5. Проверить валы на жесткость. Принять допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 0,5$  град/м.

В расчетах принять  $G = 80$  ГПа.

**Ряд нормальных линейных диаметров (ГОСТ 2590-71), мм:** 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 35; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 53; 55; 56; 60; 62; 63; 65; 67; 70; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200.

Таблица 19. Исходные данные к РГР № 7

Вариант	№ схемы	$P_1$ , кНм	$P_2$ , кНм	$P_3$ , кНм
1	2	13	3	8
2	3	3,5	16	7
3	4	6	13	3,9
4	6	15	6	3,8
5	5	10	4,5	12
6	8	5	15	8,7
7	7	4	15	10
8	10	9,5	9	3,4
9	9	10	12	3
10	10	12	4,2	9
11	9	8	7	4
12	1	15	2,4	12
13	2	10	4,8	2,8
14	4	15	3,6	6
15	3	8	7	8,6
16	6	10	6	12
17	5	5	9	13
18	8	11	12	4,2
19	7	4,5	10	3
20	8	14	48	10
21	7	10	12	10
22	10	6	7	8,5
23	9	9,5	4	4,2
24	2	9	6	9,4
25	1	4	8	11
26	4	9	10	16
27	3	6	9	7
28	6	11	11	8,5
29	5	12	12	9
30	1	11	5	9,8

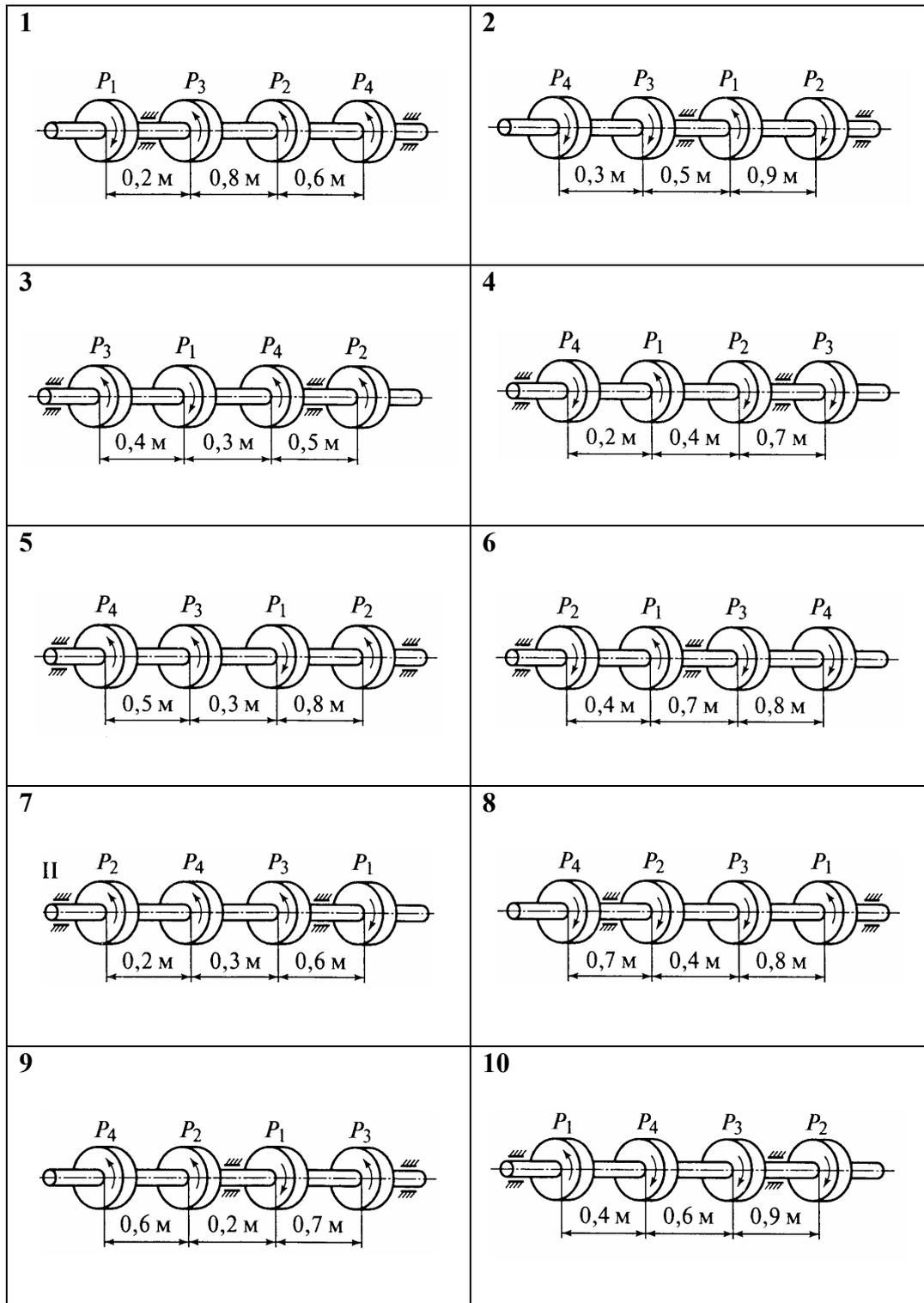


Рисунок 10. Расчетные схемы валов к РГР № 7

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 7

### РАСЧЕТ ВАЛА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Для проектирования валов можно рекомендовать следующий порядок расчета валов на прочность и жесткость при кручении.

По схеме вала и действующим на него скручивающим моментам строят эпюру крутящих моментов по отдельным участкам. Выбирают материал для рассчитываемого вала и определяют для этого материала допускаемое напряжение  $[\tau]$ . Записывают условие прочности для участка вала с максимальным значением крутящего момента (согласно эпюре крутящих моментов).

Если вал достаточно длинный и по его участкам действуют существенно разные по величине крутящие моменты, то его следует конструировать ступенчатым. Диаметр вала каждой ступени рассчитывают, принимая значения крутящего момента соответствующие каждому участку.

Определив размеры вала из условия прочности, проверяют вал на жесткость. Если при проверке окажется, что условие жесткости не выполняется, размеры вала нужно подобрать из условия жесткости.

Пример. Для заданного ступенчатого стального вала подобрать поперечные сечения и построить:

- эпюру крутящих моментов;
- эпюру углов закручивания;
- эпюру касательных напряжений по длине вала;
- эпюру касательных напряжений для опасного сечения.

$$[\tau] = 60 \text{ МПа}; \quad a = 0,5 \text{ м}; \quad M_1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$$

Сечение подобрать из условий прочности и жесткости при кручении.

Допускаемый угол закручивания принять  $[\theta^\circ] = 0,5^\circ / \text{м}$ , или

$$[\theta] = \frac{0,5 \cdot 3,14}{180} = 87,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Расчет начинаем с определения вращающего момента  $M_0$ .

Из уравнения равновесия:

$$\sum M_x = 0;$$

$$M_0 - M_1 - M_2 + M_3 = 0;$$

$$M_0 = M_1 + M_2 - M_3 = 10 + 20 - 25 = 5, \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для построения эпюр крутящих моментов делим вал на участки по местам приложения сосредоточенных моментов и по местам изменения поперечного сечения.

Используя метод сечений, определим крутящие моменты на каждом участке.

$$\sum M_x = 0$$

$$M_{K1} = M_0 = 5, \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_{K2} = +M_0 - M_1 = 5 - 10 = -5, \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_{K3} = -M_3 = -25, \text{ кН}\cdot\text{м}$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 11). Для этого берем нулевую (базовую) линию параллельную оси вала и перпендикулярно ей откладываем в масштабе значения крутящих моментов на соответствующих участках. Внутри эпюры проставляются знаки откладываемых значений, после чего выполняется штриховка перпендикулярно нулевой линии. Вне поля эпюры указываются значения крутящих моментов. Слева от эпюры в кавычках указывается название эпюры (« $M_K$ ») и через запятую проставляются единицы измерения (кН·м). Для контроля правильности построения эпюры « $M_K$ » необходимо учесть, что в местах приложения сосредоточенных вращающих моментов на эпюре « $M_K$ » должны быть скачки на величину этих моментов.

После определения крутящих моментов исходя из условия прочности можно определить требуемый диаметр вала для каждого участка, после чего принять большее ближайшее значение из стандартного ряда (При значении

диаметра вала  $d \leq 100$  мм необходимо округлять требуемый диаметр в большую сторону до значения кратного 5 мм, при  $d \geq 100$  мм – до значения кратного 10 мм).

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau] \quad (1)$$

где  $M_K$  – крутящий момент в поперечном сечении (подставляется абсолютное значение);

$W_\rho$  – полярный момент сопротивления сечения, для круглого поперечного сечения:

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (2)$$

Из (1) с учетом (2):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 0,044 \cdot \sqrt[3]{M_K} \text{ м}$$

Соответственно для каждого из участков:

$$d_1 \geq 0,044 \cdot \sqrt[3]{5} = 0,0752 \text{ м} = 75,2 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_1 = 80$  мм;

$$d_2 \geq 0,044 \cdot \sqrt[3]{5} = 0,0752 \text{ м} = 75,2 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_2 = 80$  мм;

$$d_3 \geq 0,044 \cdot \sqrt[3]{25} = 0,129 \text{ м} = 129 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_3 = 130$  мм

Теперь подберем диаметр вала из условия жесткости

$$\theta = \frac{M_K}{G \cdot J_\rho} \leq [\theta], \quad (3)$$

Для круглого вала

$$J_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (4)$$

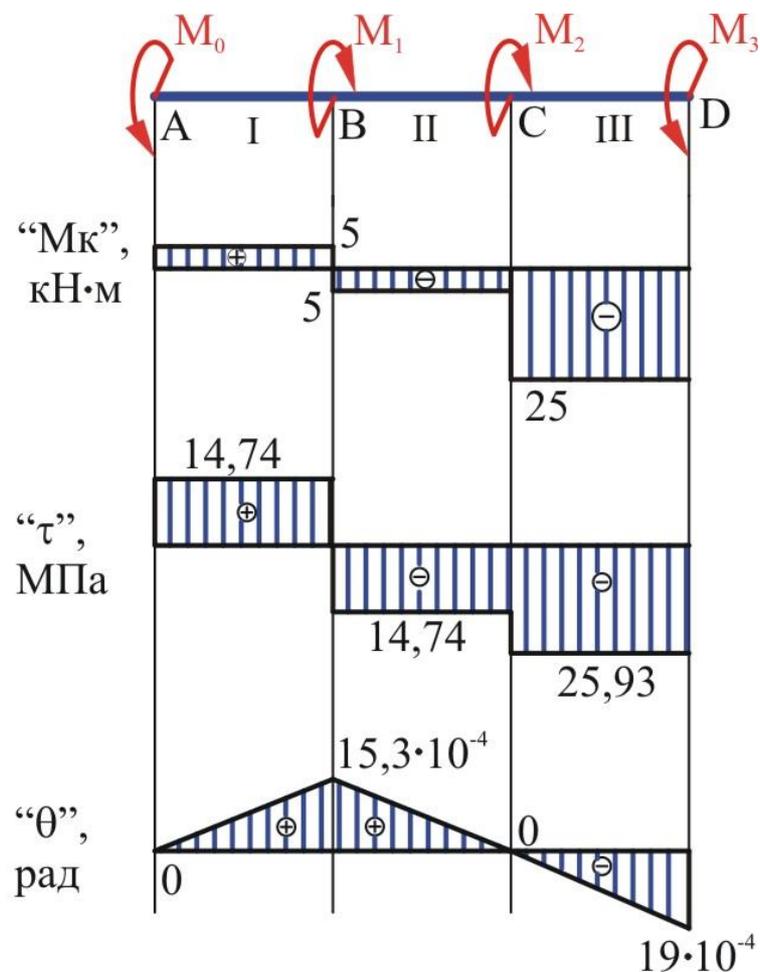


Рисунок 11.

Из (3) с учетом (4)

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_K \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 87,2 \cdot 10^{-4}}} = 0,074 \cdot \sqrt[4]{M_K} \text{ м}$$

$$d_1 \geq 0,074 \cdot \sqrt[4]{5} = 0,111 \text{ м} = 111 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_1 = 120 \text{ мм}$

$$d_2 \geq 0,074 \cdot \sqrt[4]{5} = 0,111 \text{ м} = 111 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_2 = 120 \text{ мм}$

$$d_3 \geq 0,074 \cdot \sqrt[4]{25} = 0,166 \text{ м} = 166 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_3 = 170 \text{ мм}$

Из двух найденных значений диаметров следует принять больший.  
Окончательно принимаем

$$d_1 = 120 \text{ мм}; d_2 = 120 \text{ мм}; d_3 = 170 \text{ мм}$$

По формуле (3) с учетом (4) определяем относительный угол закручивания по отдельным участкам вала

$$\theta = \frac{32 \cdot M_K}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14} \cdot \frac{M_K}{d^4} = 1,27 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{M_K}{d^4} \text{ м}^{-1}$$

$$\theta_1 = 1,27 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5}{0,120^4} = 30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$$

$$\theta_2 = 1,27 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5}{0,120^4} = 30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$$

$$\theta_3 = 1,27 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{25}{0,170^4} = 38,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$$

Максимальные касательные напряжения на участках:

$$\tau_{\max 1} = \frac{16 \cdot M_{K1}}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,120^3} = 14,74 \cdot 10^6 \leq [\tau] = 60 \cdot 10^6 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{16 \cdot M_{K2}}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,120^3} = 14,74 \cdot 10^6 \leq [\tau] = 60 \cdot 10^6 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{16 \cdot M_{K3}}{\pi \cdot d_3^3} = \frac{16 \cdot 25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,170^3} = 25,93 \cdot 10^6 \leq [\tau] = 60 \cdot 10^6 \text{ МПа}$$

Строим эпюру распределения максимальных касательных напряжений по длине вала (рисунок 11).

Для построения эпюры углов поворотов сечений предварительно необходимо определить углы закручивания участков:

$$\varphi = \theta \cdot l \quad (5)$$

где  $l$  – длина участка.

Знак угла закручивания участков принимаем такой же, как и у крутящего момента.

$$\varphi_1 = \theta_1 \cdot l_1 = +30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 = +15,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

$$\varphi_2 = \theta_2 \cdot l_2 = -30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 = -15,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

$$\varphi_3 = \theta_3 \cdot l_3 = -38 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 = -19 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

При построении эпюры углов поворотов сечений примем для сечения в точке  $A$  угол поворота сечения:

$$\varphi_A = 0$$

Тогда остальные сечения, относительно сечения в точке  $A$  будут повернутые на какие то углы.

Сечение в точке  $B$  повернется относительно сечения в точке  $A$  на угол закручивания первого участка:

$$\varphi_B = \varphi_1 = +15,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

Сечение в точке  $C$  повернется относительно сечения в точке  $A$  на сумму углов закручивания первого и второго участков:

$$\varphi_C = \varphi_1 + \varphi_2 = +15,3 \cdot 10^{-4} - 15,3 \cdot 10^{-4} = 0 \text{ рад}$$

Соответственно для сечения в точке  $D$ :

$$\varphi_D = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -19 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

Поскольку в пределах каждого участка  $\theta = const$ , то угол закручивания на каждом участке изменяется по линейному закону, поэтому эпюра углов поворотов сечений будет ограничена прямыми линиями, соединяющими значения углов поворотов сечений в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 11).

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Мовнин М.С. Основы технической механики, Л. - Машиностроение, 2009.
2. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2010.
3. Никитин Г.М. Теоретическая механика для техникумов. – М.: Наука, 2098.
4. Мовнин М.С. Руководство к решению задач по технической механике. – М.: Высшая школа, 2010.
5. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М., 2005.
6. Кочетов В.Т. Сопротивление материалов, 2004.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М., 2011.

### Дополнительная

1. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2000.
2. Эрдеди А.А. и др. Техническая механика. – М.: Высшая школа, 1998.
3. Винокуров. Сборник задач по технической механике. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике. М., 1996.
5. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов, 1995
6. Рубашкин А.Г. Лабораторно-практические работы по технической механике, М. – Высшая школа, 1985.

*Учебное издание*

**ТЕХНИЧЕСКАЯ  
МЕХАНИКА**

**Методические указания  
и задания к расчетно-графическим работам**

**Р о щ и н Константин Владимирович**

---

Подписано в печать 15.02.16. Формат 60x84 1/16.

Уч.-изд. л. 8,0. Усл. печ. л. 8,6. Тираж 300 экз.

Заказ № 9

Краснодарский технический колледж  
350000 г. Краснодар, ул. Орджоникидзе, 52

